Chapitre 9 : Variables aléatoires réelles sur un espace probabilisé fini

Dans tout ce chapitre, on considère un espace probabilisé $(\Omega, P(\Omega), P)$ fini.
Les définitions générales, et les propriétés générales des Variables Aléatoires Réelles Discrètes seront vues ultérieurement.

1. Notion de V.A.R.F.

1.1 Définition d'une V.A.R.F.

Définition : Une variable aléatoire réelle est une application qui à chaque élément de Ω associe un nombre réel.

Si X est une V.A.R., $X(\Omega)$ est l'ensemble des valeurs prises par X.
On note en général, $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$, où I est une partie finie de $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$
Si X est à valeurs entières (c'est très souvent le cas), on note $X(\Omega) = \{i, i \in X(\Omega)\}$

Si $x \in \mathbb{R}$, on note $(X = x)$ l'événement "X vaut x". De même pour $(X \leq x)$, $(X < x)$, etc…

Exemple :
On lance 3 fois une pièce de monnaie. Soit X la variable aléatoire qui associe le nombre de "piles" obtenus.
$\text{card}(\Omega) = 2^3 = 8$.
$X(\Omega) = \{0,1,2,3\}$
$(X = 2) = \{PPF, PFP, FFP\}$ $\quad (X \leq 1) = \{FFF, PFF, FPF, FFP\}$

Propriété :
Soit X une V.A.R.D. telle que $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$
Alors la famille $(X = x_i)_{i \in I}$ est un système complet d'événements de Ω.

En effet, si $i \neq j$, $(X = x_i) \cap (X = x_j) = \varnothing$ et $\Omega = \cup_{i \in I}(X = x_i)$

Remarque : On a donc toujours $\sum\limits_{i \in I} P(X = x_i) = 1$.

1.2 Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Définition : Soit X une V.A.R.D.
On appelle loi de probabilité de X l'ensemble des couples $(x_i, P(X = x_i))$ où $x_i \in X(\Omega)$.

En d'autres termes, donner la loi de probabilité d'une V.A.R.D., c'est donner l'ensemble des $\{x_i\}$ et la probabilité de chaque $P(X = x_i)$, pour $i \in I$.
Quand I n'est pas trop grand, on peut donner les résultats dans un tableau. Sinon, on donne une formule pour $P(X = x_i)$.
Si X est à valeurs entières, on cherche $P(X = i)$ pour $i \in X(\Omega)$.
Attention à bien repérer dans l'énoncé la définition de X, pour pouvoir trouver sa loi. ("X est le nombre de …")

Exemples :

1) Dans l'exemple d'avant : Loi de probabilité de X : $X(\Omega) = \{0,1,2,3\}$

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	1/8	3/8	3/8	1/8

2) On lance un dé équilibrée n fois. On note X le nombre de six obtenus.

Loi de X : $X(\Omega) = \{0, 1,2, \ldots, n\}$.

Pour $k \in \{0, \ldots, n\}$ $(X = k)$ = "on obtient k fois 6, et n – k fois 1,2,3,4 ou 5 "

$\text{card}(\Omega) = 6^n$

$\text{card}(X = k) = \binom{n}{k} \times 5^{n-k}$ (choix des k lancers parmi les n, choix des résultats des n – k autres lancers). Donc $P(X = k) = \dfrac{\binom{n}{k}5^{n-k}}{6^n}$

1.3 Fonction de répartition d'une V.A.R. discrète

Définition : Soit X une VA.R. discrète.

On appelle fonction de répartition de X la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = P(X \leq x)$

Remarque : Si X est à valeurs entières, on s'intéresse plutôt à $P(X \leq k)$, pour $k \in \mathbb{N}$.

Propriété :

Si $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$, alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(X \leq k) = P(X= 0) + \ldots + P(X = k) = \sum_{i=0}^{k} P(X = i)$

$P(X = k) = P(X \leq k) - P(X \leq k - 1)$. $(= F_X(k) - F_X(k - 1))$

Démonstration :

$(X \leq k) = (X = 0) \cup (X = 1) \cup \ldots \cup (X = k)$ et la réunion est disjointe, donc

$P(X \leq k) = P(X = 0) + P(X = 1) + \ldots + P(X = k)$.

$(X \leq k) = (X \leq k - 1) + (X = k)$, et la réunion est disjointe, donc

$P(X \leq k) = P(X \leq k - 1) + P(X = k)$ donc $P(X = k) = P(X \leq k) - P(X \leq k - 1)$.

Remarques : $(X \leq k)$

0	1	2	…	k – 1	k	k+1	…

$(X \leq k - 1)$ $(X = k)$

_ Il existe des formules analogues pour $P(X \geq k)$, $P(X > k)$, $P(X < k)$

_ Dans le cas où X est défini comme un maximum de plusieurs nombres, il est plus facile de calculer d'abord $P(X \leq k)$, puis $P(X = k)$. (le plus grand nombre $\leq k \Leftrightarrow$ tous les nombres $\leq k$).

Si X défini comme un minimum, utilisez plutôt $P(X \geq k)$.

Exemple : Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire simultanément deux boules de l'urne. Soit X le plus grand des numéros tirés. $X(\Omega) = \{2, \ldots, n\}$.

$\forall k \in \{2, \ldots, n\}$, $(X \leq k)$ =" les deux boules sont inférieures ou égales à k".

$\text{card}(\Omega) = \binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$ $P(X \leq k) = \binom{k}{2}/\binom{n}{2} = \dfrac{k(k-1)}{2}/\dfrac{n(n-1)}{2} = \dfrac{k(k-1)}{n(n-1)}$

donc $P(X = k) = P(X \leq k) - P(X \leq k - 1) = \dfrac{k(k-1) - (k-1)(k-2)}{n(n-1)} = \dfrac{2(k-1)}{n(n-1)}$

1.4 Fonction d'une V.A.R.D.

Propriété :
Soit X une V.A.R.D. et g une fonction définie sur $X(\Omega)$.
Alors $Y = g(X)$ est une variable aléatoire réelle discrète.
Si $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$, alors $Y(\Omega) = \{g(x_i), i \in I\}$. (attention les $g(x_i)$ ne sont pas forcément distincts).

Remarque : Pour déterminer la loi de Y, on peut utiliser que $P(Y = y) = P(g(X) = y)$ et résoudre l'équation $g(X) = y$.

Exemple :
Soit X une VAR de loi :

x	-2	-1	0	1	2
P(X = x)	1/8	1/4	1/8	1/8	3/8

Sont $Y = X^2$ Alors $Y(\Omega) = \{0,1,4\}$ $P(Y = 0) = P(X^2 = 0) = P(X = 0) = \frac{1}{8}$

$P(Y = 1) = P(X^2 = 1) = P(X = 1) + P(X = -1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$

$P(Y = 4) = P(X^2 = 4) = P(X = 2) + P(X = -2) = \frac{1}{2}$

2. Espérance et moments d'une V.A.R.D.

2.1 Espérance d'une V.A.R.D.

Définition :
Soit X une VARD telle que $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$. (I partie finie de $\mathbb{N}$)

Alors on appelle espérance de X, le réel $E(X) = \sum_{i \in I} x_i P(X = x_i)$

Remarques :

_ Si X est à valeurs dans $\mathbb{N}$, $E(X) = \sum_{i \in X(\Omega)} iP(X = i)$
_ E(X) représente la "valeur moyenne" prise par X. Il faut toujours penser à vérifier la cohérence du résultat.

Exemples :
1) Suite exemple d'avant : on lance 3 fois une pièce de monnaie. X = nombre de piles :
$X(\Omega) = \{0,..,3\}$ $E(X) = 0\times\frac{1}{8} + 1\times\frac{3}{8} + 2\times\frac{3}{8} + 3\times\frac{1}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$

2) 2ème exemple : $X(\Omega) = \{2,..,n\}$, et $\forall k \in \{2,..,n\}$, $P(X = k) = \frac{2(k-1)}{n(n-1)}$

$$E(X) = \sum_{k=2}^{n} kP(X = k) = \sum_{k=2}^{n} \frac{2k(k-1)}{n(n-1)} = \frac{2}{n(n-1)}\left(\sum_{k=2}^{n} k^2 - \sum_{k=2}^{n} k\right)$$

$= \dfrac{2}{n(n-1)}\left(\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 1 - \dfrac{n(n+1)}{2} + 1\right) = \dfrac{2}{n(n-1)}\, n(n+1)\, \dfrac{2n+1-3}{6}$

$= \dfrac{2(n+1)(2n-2)}{6(n-1)} = \dfrac{2(n+1)}{3}$

Propriété : Linéarité de l'espérance :
Soient X et Y deux V.A.R et λ un réel.
Alors $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
$E(\lambda X) = \lambda E(X)$.

Remarque : En particulier $E(aX + b) = aE(X) + b$.

Théorème de transfert :
Soit X une VARD, $(X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$ et g une fonction de $X(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$.

Alors $E(g(X)) = \sum_{i \in I} g(x_i)P(X = x_i)$

Remarque : Si $Y = g(X)$, comment calculer $E(Y)$?
_ si g est affine ($Y = aX + b$), alors $E(Y) = aE(X) + b$
_ sinon théorème de transfert

Exemples : Suites des exemples précédents : 1)

x	0	1	2	3
P(X = x)	1/8	3/8	3/8	1/8

$E(X^2)$? Théorème de transfert :

$E(X^2) = \sum_{i=0}^{3} i^2 P(X= i) = \dfrac{1}{8}\times 0 + \dfrac{3}{8}\times 1 + \dfrac{3}{8}\times 4 + \dfrac{1}{8}\times 9 = \dfrac{24}{8} = 3$

2) $E(X^2) = \sum_{k=2}^{n} k^2 P(X = k) = \sum_{k=2}^{n} \dfrac{2k^2(k-1)}{n(n-1)} = \dfrac{2}{n(n-1)}\left(\sum_{k=2}^{n} k^3 - \sum_{k=2}^{n} k^2\right)$

$= \dfrac{2}{n(n-1)}\left(\dfrac{n^2(n+1)^2}{4} - 1 - \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 1\right)$

$= \dfrac{2}{n(n-1)}\, \dfrac{n(n+1)(3n(n+1) - 2(2n+1))}{12} = \dfrac{(n+1)(3n^2 - n - 2)}{6(n-1)}$

$= \dfrac{(n+1)(n-1)(3n+2)}{6(n-1)} = \dfrac{(n+1)(3n+2)}{6}$

2.2 Moment d'ordre r

Définition
Soit X une VARD. Soit $r \in \mathbb{N}^*$.
On appelle moment d'ordre r le réel $E(X^r)$

Remarques :

_ Si $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$, d'après le théorème de transfert, $E(X^r) = \sum_{i \in I} x_i^r P(X = x_i)$

_ le moment d'ordre 1 de X est l'espérance de X

2.3 Variance d'une VARD

Définition
Soit X une VARD.
On appelle variance de X le nombre réel $V(X) = E((X - E(X))^2)$ et écart-type de X le nombre $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Propriété : (Formule de Huygens)
Soit X une VARD.

Alors $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

Démonstration :
$V(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2 - 2E(X)X + E(X)^2) = E(X^2) - E(2E(X)X) + E(E(X)^2)$
$= E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(X)^2 = E(X^2) - E(X)^2$

Exemples : Suite exemples d'avant
1) On a vu que $E(X) = \dfrac{3}{2}$ et $E(X^2) = 3$

Donc $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 3 - \dfrac{9}{4} = \dfrac{3}{4}$ Donc $\sigma(X) = \sqrt{\dfrac{3}{4}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

2) On a vu que $E(X) = \dfrac{2(n+1)}{3}$ $E(X^2) = \dfrac{(n+1)(3n+2)}{6}$

Donc $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \dfrac{(n+1)(3n+2)}{6} - \dfrac{4(n+1)^2}{9} = \dfrac{(n+1)(9n+6-8n-8)}{18}$

$= \dfrac{(n+1)(n-2)}{18}$

Remarque : La variance (ou l'écart type) mesure la dispersion de la VAR (c'est-à-dire son écart par rapport à la valeur moyenne). Elle est toujours positive.

Propriété :
Soit X une V.A.R.D et $Y = aX + b$.
Alors $V(Y) = a^2V(X)$ et $\sigma(Y) = |a|\sigma(X)$

Démonstration :
$Y = aX + b$ donc $E(Y) = aE(X) + b$ $E(Y)^2 = (aE(X) + b)^2 = aE(X)^2 + 2abE(X) + b^2$
$Y^2 = (aX + b)^2 = a^2X^2 + 2abX + b^2$ Donc $E(Y^2) = a^2E(X^2) + 2abE(X) + b^2$
$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = a^2E(X^2) + 2abE(X) + b^2 - (aE(X)^2 + 2abE(X) + b^2)$
$= a^2E(X^2) - a^2E(X)^2 = a^2V(X)$
$\sigma(Y) = \sqrt{V(Y)} = \sqrt{a^2V(X)} = |a|\sqrt{V(X)} = |a|\sigma(X)$.

Exemple : Avec X du 1er exemple. Posons $Y = 2X - 5$.
$E(Y) = 2E(X) - 5 = 2\times\dfrac{3}{2} - 5 = -2$ $V(Y) = 2^2V(X) = 4 \times \dfrac{3}{4} = 3$.