

## Chapitre 7 : Espaces probabilisés finis

### 1. Expériences aléatoires / Événements

#### 1.1 Expérience aléatoire et univers

Définitions :

Une **expérience aléatoire** est une expérience dont le résultat ne peut être prévu a priori (expérience dépendant du hasard).

Un résultat possible est appelé **éventualité**. L'ensemble des éventualités, noté  $\Omega$ , est appelé **univers**.

Exemples :

1) On lance successivement deux pièces :

$$\Omega = \{PP, FP, PF, FF\}$$

2) On prend au hasard un nombre  $x$  entre 0 (strictement) et 1 :  $\Omega = ]0 ; 1[$ .

#### 1.2 Événements

Un événement est un fait qui peut être réalisé ou non lors de l'expérience aléatoire.

Un événement est représenté par l'ensemble des éventualités qui le réalisent. C'est une partie de  $\Omega$ .

Si  $\Omega$  est fini, l'ensemble des événements est  $P(\Omega)$ , .

Les définitions sur les parties d'un ensemble se transposent ainsi :

Définition :

Soient A et B deux événements.

L'événement « non A », noté  $\overline{A}$  est réalisé si et seulement si A n'est pas réalisé.

L'événement « A et B », noté  $A \cap B$  est réalisé si et seulement si A et B sont réalisés lors de la même expérience aléatoire.

L'événement « A ou B », noté  $A \cup B$  est réalisé si et seulement si l'un au moins des deux événements A et B est réalisé.

Les événements A et B sont dits incompatibles (ou disjoints) s'ils ne peuvent être réalisés en même temps.

## 2. Espaces probabilisés finis

### 2.1 Probabilité sur un espace probabilisé fini

Définition :

Soit  $\Omega$  un ensemble fini. Le couple  $(\Omega, P(\Omega))$  est appelé espace probabilisable.

Les éléments de  $P(\Omega)$  sont appelés des événements.

Les singletons  $\{\omega\}$  de  $\Omega$  sont appelés événements élémentaires.

Définition :

On appelle probabilité sur l'espace probabilisable  $(\Omega, P(\Omega))$  toute application  $P$  de  $P(\Omega)$  dans  $\mathbb{R}$  vérifiant les trois axiomes :

1)  $\forall A \in P(\Omega), 0 \leq P(A) \leq 1$ .

2)  $P(\Omega) = 1$

3) Pour tous  $A, B \in P(\Omega)$ , si  $A$  et  $B$  sont disjoints, alors  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ .

Le triplet  $(\Omega, P(\Omega), P)$  est appelé espace probabilisé fini.

### 2.2 Equiprobabilité

Propriété - Définition :

Soit  $(\Omega, P(\Omega))$  un espace probabilisable fini.

L'application de  $P(\Omega)$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :  $\forall A \in P(\Omega), P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$  est une probabilité sur  $(\Omega, P(\Omega))$ . Cette probabilité est appelée probabilité uniforme sur  $(\Omega, P(\Omega))$ .

Démonstration :

si  $A \subset \Omega$  alors  $\text{card}(A) \geq 0, \text{card}(\Omega) > 0$  donc  $P(A) \geq 0$ .

$\text{card}(A) \leq \text{card}(\Omega)$  donc  $P(A) \leq 1$ .

$$P(\Omega) = \frac{\text{card}(\Omega)}{\text{card}(\Omega)} = 1$$

Si  $A$  et  $B$  sont disjoints, alors  $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B)$ .

$$\text{Donc } P(A \cup B) = \frac{\text{card}(A \cup B)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\text{card}(A) + \text{card}(B)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} + \frac{\text{card}(B)}{\text{card}(\Omega)} = P(A) + P(B).$$

Remarques :

1) Dans le cas de la probabilité uniforme, les probabilités de tous les événements élémentaires sont égales. (car  $P(\{\omega\}) = \frac{\text{card}(\{\omega\})}{\text{card}(\Omega)} = \frac{1}{\text{card}(\Omega)}$  On dit qu'il y a équiprobabilité.

Le texte d'un énoncé nous renseigne sur l'équiprobabilité par des termes comme : « un dé non pipé », « des boules indiscernables au toucher », « on tire au hasard »,...

2) Attention à ne pas confondre  $\Omega$  (l'ensemble des résultats possibles de l'expérience aléatoire) et  $A$  (l'ensemble des résultats positifs).

Exemple : On lance deux fois un dé non pipé.

Quelle est la probabilité d'obtenir un total supérieur ou égal à 10 ?  $\text{card}(\Omega) = 6^2 = 36$ .

$A = \{(4,6), (5,5), (5,6), (6,4), (6,5), (6,6)\}$   $\text{card}(A) = 6$ . Il y a équiprobabilité donc  $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ .

## 2.3 Propriétés d'une probabilité

Propriété :

Soit  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$  est un espace probabilisé fini. Soient A et B deux événements.

On a :

1)  $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$  et donc  $P(\emptyset) = 0$ .

2)  $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$

3) si  $B \subset A$ ,  $P(B) \leq P(A)$ .

Démonstration :

1)  $A \cup \overline{A} = \Omega$  et A et  $\overline{A}$  sont disjoints. Donc  $P(A) + P(\overline{A}) = P(\Omega) = 1$

Donc  $P(\emptyset) = 1 - P(\overline{\emptyset}) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0$ .

2)  $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A \cap (B \cup \overline{B}) = A \cap \Omega = A$

De plus  $(A \cap B) \cap (A \cap \overline{B}) = A \cap B \cap \overline{B} = A \cap \emptyset = \emptyset$ , donc les événements sont incompatibles. Donc  $P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) = P(A)$ .

3)  $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) = P(B) + P(\overline{A} \cap B) \geq P(B)$  (car  $P(\overline{A} \cap B) \geq 0$ )

Propriété :

Si  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$  et si P est une probabilité sur  $\Omega$ , alors  $\sum_{i=1}^n P(\omega_i) = 1$ .

Exemple :

Un dé truqué est tel que la probabilité d'obtenir une face est proportionnelle à son numéro. Déterminer la probabilité de chaque face.

Il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $\forall i \in \{1, \dots, 6\}$ ,  $p(i) = \lambda \times i$ .

$p(\{i\}) \geq 0$  donc  $\lambda \geq 0$ .

$$\sum_{i=1}^6 p(i) = \lambda + 2\lambda + 3\lambda + 4\lambda + 5\lambda + 6\lambda = 21\lambda = 1 \quad \text{donc } \lambda = \frac{1}{21}.$$

Donc  $p(1) = \frac{1}{21}$ ,  $p(2) = \frac{2}{21}$ ,  $p(3) = \frac{3}{21}$ ,  $p(4) = \frac{4}{21}$ ,  $p(5) = \frac{5}{21}$ ,  $p(6) = \frac{6}{21}$ .

## 2.4 Probabilité d'une réunion / Formule du crible

Rappel : Si  $A_1$  et  $A_2$  sont incompatibles,  $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$

Propriété :

Si  $A_1, A_2 \dots A_n$  sont des événements incompatibles, (c'est-à-dire  $\forall i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$ ), alors

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) \quad (P(\cup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i))$$

Démonstration : par récurrence

Propriété :

Soient  $A_1$  et  $A_2$  deux événements quelconques.

On a alors :  $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$ .

Démonstration :

$A_1 \cup A_2 = A_1 \cup (\overline{A_1} \cap A_2)$  et ces événements sont incompatibles

Donc  $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(\overline{A_1} \cap A_2)$

Or  $P(A_2) = P(A_1 \cap A_2) + P(\overline{A_1} \cap A_2)$  donc  $P(\overline{A_1} \cap A_2) = P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$

Donc  $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$

Exemple :

Un club de sport a 50 adhérents. 30 pratiquent le tir à l'arc, 18 le golf, et 6 les deux sports.

On choisit un adhérent au hasard.

Quelle est la probabilité qu'il pratique au moins l'un des deux sports ?

$G =$  « il pratique le golf »     $T =$  « il pratique le tir ».

$$P(T \cup G) = P(T) + P(G) - P(T \cap G) = \frac{30}{50} + \frac{18}{50} - \frac{6}{50} = \frac{42}{50} = \frac{21}{25}$$

Propriété : **Formule du crible** (ou **Formule de Poincaré**)

Soit  $(\Omega, P(\Omega), P)$  un espace probabilisé fini.

Pour toute famille  $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$  d'événements,

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k})$$

Remarques :

\_ cette formule peut aussi s'écrire :  $P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{X \subset \{1, \dots, n\}, X \neq \emptyset} (-1)^{\text{card}(X)+1} P(\bigcap_{i \in X} A_i)$

\_ il y a  $2^n - 1$  termes dans la somme (parties de  $\{1, \dots, n\}$  sauf  $\emptyset$ )

Exemples :

\_  $n=2$  :  $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$  (déjà vu)

\_  $n=3$  :  $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$ .

\_  $n=4$  :  $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4)$

$$\begin{aligned} & - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_4) - P(A_2 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_4) - P(A_3 \cap A_4) \\ & + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_4) + P(A_1 \cap A_3 \cap A_4) + P(A_2 \cap A_3 \cap A_4) \\ & - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) \end{aligned}$$

Exemple :

Dans un sac, il y a 10 jetons noirs, 10 jetons blancs et 10 jetons rouges, indiscernables au toucher. On en tire 6 simultanément.

Quelle est la probabilité au moins une des trois couleurs ne soit pas représentée ?

Soit  $N = \{\text{il n'y a pas de jeton noir}\}$   $B = \{\dots \text{ blanc}\}$   $R = \{\dots \text{ rouge}\}$

$A = N \cup B \cup R$  mais événements non incompatibles.

$$P(A) = P(N) + P(B) + P(R) - P(N \cap B) - P(N \cap R) - P(B \cap R) + P(N \cap B \cap R)$$

$$\text{Or } P(N) = \frac{\binom{20}{6}}{\binom{30}{6}} \quad (= P(B) = P(R))$$

$$P(N \cap B) = \frac{\binom{10}{6}}{\binom{30}{6}} \quad (= P(N \cap R) = P(B \cap R))$$

$$P(N \cap B \cap R) = 0$$

$$\text{Donc } P(A) = \frac{3\left(\binom{20}{6} - \binom{10}{6}\right)}{\binom{30}{6}} \approx 0,507.$$