Chapitre 6 : Ensembles – Dénombrements

1. Vocabulaire des ensembles

1.1 Ensemble et sous-ensemble

Un ensemble E est constitué d'éléments.
Si un élément x appartient à E, on note $x \in E$.
L'ensemble qui ne contient aucun élément est appelé ensemble vide, noté $\emptyset$.

Ex : $E = \{1,2,3\}$ $3 \in E$, $5 \notin E$.
$F = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geq 4\}$ $F =]-\infty ;2] \cup [2 ; +\infty[$ $G = \mathbb{R}[x]$

Définition :
Soient E et F deux ensembles.
On dit que E est inclus dans F si tout élément de E est un élément de F. On dit aussi que E est un sous-ensemble de F, ou une partie de F.
On note $E \subset F$.

Exemples : $\{3,4,5\} \subset \{1,2,3,4,5,6\}$, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset D \subset Q \subset \mathbb{R}$

Remarque : $E \subset F$ signifie que si $x \in E$, alors $x \in F$.

Définition :
L'ensemble des sous-ensembles d'un ensemble de E est noté P(E). C'est l'ensemble des parties de E.

Ex : $E = \{1,2,3\}$
$P(E) = \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$.

1.2 Complémentaire, intersection et réunion

Définition :
Soit E un ensemble et $A \subset E$.
On appelle complémentaire de A dans E noté $\overline{A}$ (ou E\A) l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A. $\overline{A} = \{x \in E \mid x \notin A\}$.

Exemple : $A = [2 ; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$. $\overline{A} =] -\infty ;2[$.

Règles de calcul : Soit E un ensemble
_ $\overline{E} = \emptyset$ et $\overline{(\emptyset)} = E$

_ si $A \subset E$, $\overline{\overline{A}} = A$

_ si $A \subset E$ et $B \subset E$, $A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$.

Attention, le contraire de "Aucun" est "Au moins un"
le contraire de "Tous" est "Au moins un n'est pas".

Ex : A = "Tous les élèves sont des garçons"

$\overline{A}$ = "Au moins un élève est une fille" $\neq$ "Tous les élèves sont des filles".

Définitions :
Soient A et B deux parties de E
_ l'intersection de A et B, notée $A \cap B$ est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à A et à B.
_ la réunion de A et B, notée $A \cup B$, est l'ensemble des éléments de E qui sont dans A ou dans B (c'est-à-dire dans au moins un des deux ensembles A et B).

$x \in A \cap B \Leftrightarrow$ x appartient à A **et** à B
$x \in A \cup B \Leftrightarrow$ x appartient à A **ou** $x \in B$ (au moins un des deux)

Exemple : Si A = {1,2,5} et B = {1,5,7} $A \cap B = \{1,5\}$ $A \cup B = \{1,2,5,7\}$..

Remarques :
_ Si $A \cap B = \emptyset$, on dit que A et B sont disjoints.
_ $A \cap B \subset A$, $A \cap B \subset B$, $A \subset A \cup B$, $B \subset A \cup B$
_ si $A \subset B$, $A \cap B = A$, $A \cup B = B$

Règles de calcul : A, B et C sont des parties de E.
_ $A \cap E = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cap A = A$, $A \cap \overline{A} = \emptyset$.
_$A \cup E = E$, $A \cup \emptyset = A$, $A \cup A = A$, $A \cup \overline{A} = E$.
_ $A \cap B = B \cap A$ et $A \cup B = B \cup A$
_ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ et $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
_ $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ (distributivité)

Propriété : Lois de Morgan
$\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Remarque : On peut définir de la même manière l'ensemble $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_p$ aussi noté $\cup_{i=1}^{p} A_i$ et l'ensemble $A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_p$, aussi noté $\cap_{i=1}^{p} A_i$

$x \in \cup_{i=1}^{p} A_i \Leftrightarrow$ x appartient à au moins un des ensembles
$x \in \cap_{i=1}^{p} A_i \Leftrightarrow$ x appartient à tous les ensembles.

1.3 Produit cartésien de deux ensembles

Définition :
Soient E et F deux ensembles. Le produit cartésien $E \times F$ est l'ensemble des couples constitués d'un élément de E et d'un élément de F.
A retenir : $(x, y) \in E \times F$ signifie que $x \in E$ et $y \in F$.

Remarque : $E \times E$ est noté E^2 De manière analogue, on peut définir $E \times \ldots \times E = E^n$.
Ex : $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ signifie que $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{R}$.

2. Dénombrement

2.1 Ensembles finis

A partir de maintenant, on considère des ensembles finis.

Dénombrer un ensemble E, c'est déterminer le nombre de ses éléments, c'est-à-dire son cardinal.

Remarque : Soit E un ensemble à n éléments.
Pour choisir un élément au hasard dans E, il y a n choix possibles.

Propriété : Soit E un ensemble et A et B deux parties de E.
$\text{card}(\overline{A}) = \text{card}(E) - \text{card}(A)$
si A et B sont disjoints, $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B)$

Choix d'éléments dans des ensembles différents :
Propriété :
Soient E et F deux ensembles finis. Si E a n éléments et si F à p éléments, alors $E \times F$ a $n \times p$ éléments.
Donc, pour choisir au hasard un élément de E et un élément de F, il y a $n \times p$ possibilités.

Exemple : Une porte est équipée d'un digicode. (10 chiffres, 4 lettres)
Pour entrer, il faut composer un code d'un chiffre et d'une lettre.
Il y a donc $10 \times 4 = 40$ possibilités

Choix d'éléments dans le même ensemble : Deux questions à se poser :
_ les éléments doivent-ils être différents, ou peuvent-ils être égaux ? (= avec remise ou sans remise)
_ s'ils sont tous différents, l'ordre dans lequel on les choisit importe-t-il ? (tirages simultanés ou successifs ?)

Remarques :
_ Attention, dans le cas où on peut choisir plusieurs fois le même élément, alors on est obligé de tenir compte de l'ordre (dans l'optique de l'équiprobabilité)
Ex : on lance 2 pièces. 4 possibilités : PP, PF, FP, FF
_ Dans le cas de tirages successifs sans remise, si l'ordre n'intervient pas dans les questions, on peut considérer que les tirages sont simultanés.

Exemple : Une urne contient 4 boules numérotées de 1 à 4.
a) On tire deux boules en remettant la première (ordre, avec remise)
Cas possibles : 1-1, 1-2, 1-3, 1-4, 2-1, 2-2, 2-3, 2-4, 3-1, 3-2, 3-3, 3-4, 4-1, 4-2, 4-3, 4-4
(4 choix pour la $1^{ère}$, 4 pour la $2^{ème}$: $4 \times 4 = 16$ poss.)
b) On tire deus boules successivement sans remettre la première (ordre, sans remise)
Cas possibles : 1-2, 1-3, 1-4, 2-1, 2-3, 2-4, 3-1, 3-2, 3-4, 4-1, 4-2, 4-3 (12 poss.)
(4 choix pour la $1^{ère}$, 3 pour la $2^{ème}$: 12 poss.)
c) On tire deux boules ensemble : pas d'ordre entre les boules
Cas possibles : 1-2, 1-3, 1-4, 2-3, 2-4, 3-4 (6 poss.)
(comment dénombrer sans les écrire tous ?)

2.2 p- listes d'un ensemble à n éléments

Définition :
Soit E un ensemble à n éléments et $p \in \mathbb{N}$.
Une p-liste est une liste ordonnée de p éléments non forcément distincts de E.
(c'est-à-dire un élément $(x_1, \ldots, x_p)$ de E^p).

Exemple : E = {1,2,3,4}
(1,4,1), (2,1,3), (1,2,3) ... sont des 3-listes de E.

Propriété : Si E a n éléments, il y a n^p p-listes possibles.

Application aux dénombrements :
Si on choisit p éléments non distincts et avec ordre dans un ensemble à n éléments (exemple : tirages successifs avec remise, lancers de plusieurs dés, de plusieurs pièces, …), il y a n^p résultats possibles.

Démonstration :
Pour choisir un élément $(x_1, \ldots, x_p)$ de E^p Il y a n possibilités pour x_1, n pour x_2, …, n pour x_p.
En tout : $n \times n \times .. \times n = n^p$.

Exemple :
On lance 10 fois de suite une pièce de monnaie.
A chaque lancer, il y a deux résultats possibles.
En tout $2^{10} = 1024$ résultats possibles.

2.3 Arrangements

Définition :
Soit E un ensemble à n éléments et $p \leq n$.
Un arrangement à p éléments de E est une liste ordonnée d'éléments distincts de E.

Définition :
Si $p \leq n$, on note A_n^p le nombre d'arrangements à p éléments d'un ensemble à n éléments.

Propriété : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $p \leq n$, $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$ (= n(n – 1)…(n – p +

Application aux dénombrements :
Soit E un ensemble à n éléments. Si on choisit p éléments distincts et ordonnés (exemple : tirages successifs sans remise), il y a A_n^p résultats possibles.

Démonstration :
Choix du premier : n possibilités
Choix du deuxième : n – 1 possibilités
….
Choix du p-ème : n – (p – 1) possibilités (p – 1 sont déjà pris)
Donc $A_n^p = n \times (n-1) \times \ldots \times (n-(p-1))$

$$= \frac{n \times (n-1) \times \ldots \times (n-p+1) \times (n-p) \times \ldots \times 2 \times 1}{(n-p) \times \ldots \times 2 \times 1} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Exemple : Une course de chevaux compte 7 chevaux au départ. Combien de trios gagnants sont possibles ?

On choisit trois chevaux parmi 7, et l'ordre intervient.
Il y a $A_7^3 = 7\times6\times5 = 210$ résultats possibles.

2.4 Permutations

Définition :
Soit E un ensemble à n éléments.
On appelle permutation de E tout arrangement à n éléments de E.
(une permutation est donc une manière d'ordonner les éléments de E).

Propriété : Si E est un ensemble à n éléments, il y a n! permutations de E (c'est-à-dire il y a n! manières d'ordonner les éléments de E).

Démonstration : $A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$

Exemple : Un championnat à 6 équipes est réalisé. Combien y-a-t-il de classements possibles ?

On cherche le nombre de manières d'ordonner un ensemble à 6 éléments. Il y a $2\times3\times4\times5\times6 = 720$ classements possibles.

2.5 Combinaisons

Définition : Soit E un ensemble à n éléments. Soit $p \leq n$.
On appelle combinaison de p éléments de E une partie de E à p éléments.

Remarque : Une combinaison est un ensemble d'éléments distincts et non ordonnés.

Définition : Soient p et n tels que $0 \leq p \leq n$
$\binom{n}{p}$ (« p parmi n ») est le nombre de combinaisons à p éléments dans un ensemble à n éléments.

Remarques : 1) $\binom{n}{p}$ est appelé un coefficient binomial.
2) Dans certains livres, on trouve encore l'ancienne notation C_n^p.

Propriété : $\forall\, p \leq n$, $\binom{n}{p} = \frac{n\,!}{p\,!\,(n-p)\,!}$

Démonstration :
Choisir un arrangement à p éléments, c'est choisir une partie à p éléments de E, puis choisir un ordre sur ces p éléments.

Donc $A_n^p = \binom{n}{p} \times p!$ $\qquad \binom{n}{p} = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n\,!}{p\,!\,(n-p)\,!}$.

Exemple : $\binom{7}{2} = \dfrac{7!}{5!2!} = \dfrac{7\times 6}{2} = 21$

Propriété : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{1} = n$

Démonstration : $\binom{n}{0} = \dfrac{n\,!}{0\,!n\,!} = 1$, $\binom{n}{n} = \dfrac{n!}{0!n!} = 1$ $\quad\binom{n}{1} = \dfrac{n\,!}{(n-1)!1!} = n$

(à l'oral cohérence avec les ensembles)

Application aux dénombrements :
Soit E un ensemble à n éléments.
Si on choisit sans les ordonner p éléments dans l'ensemble (ex : tirages simultanés), alors il y a $\binom{n}{p}$ résultats possibles.

Exemple :
Dans un jeu de 32 cartes, on tire simultanément 3 cartes.
On choisit donc 3 éléments parmi 32.
Nombre de résultats possibles : $\binom{32}{3} = \dfrac{32!}{29!3!} = \dfrac{32\times 31\times 30}{3\times 2} = 16\times 31\times 10 = 4960$

Remarque :
Lorsqu'on répète la même épreuve n fois, et qu'on choisit k épreuves parmi ces n épreuves, il y a $\binom{n}{k}$ possibilités.

Ex : On lance 5 fois un dé.
Combien de résultats en tout ? avec exactement 2 "trois" à l'arrivée ?
En tout : 6^5 possibilités
Avec 2 "trois" à l'arrivée :
Choix des places des "trois" : $\binom{5}{2} = \dfrac{5!}{3!2!} = \dfrac{5\times 4}{2} = 10$ possibilités
(33…, 3.3.., 3..3., 3…3, .33.., .3.3., .3..3, ..33., ..3.3, …33)
Choix des trois autres dés : $5\times 5\times 5 = 125$
Donc 1250 possibilités.

Conclusion :

Choix de p éléments dans un ensemble de n éléments

- Eléments distincts
  - Avec ordre : A_n^p possiblités *(tirages successifs sans remise)*
  - Sans ordre : $\binom{n}{p}$ possibilités *(tirages simultanés)*
- Eléments non distincts : n^p possibilités (l'ordre compte) *(tirages successifs avec remise)*

2.6 Propriétés des coefficients binomiaux

Propriété : si $0 \leq p \leq n$, $\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$

Démonstration :

$$\binom{n}{n-p} = \frac{n!}{(n-(n-p))!(n-p)!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \binom{n}{p}$$

<u>Propriété :</u> Formule du triangle de Pascal

Pour tous entiers p et n tels que $1 \leq p \leq n$, $\binom{n}{p-1} + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p}$

Démonstration :

$$\binom{n}{p-1} + \binom{n}{p} = \frac{n!}{(p-1)!(n-(p-1))!} + \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

$$= \frac{n!}{(p-1)!(n-p+1)(n-p)!} + \frac{n!}{p\times(p-1)!(n-p)!} = \frac{n!}{(p-1)!(n-p)!}\left(\frac{1}{n-p+1} + \frac{1}{p}\right)$$

$$= \frac{n!}{(p-1)!(n-p)!}\,\frac{p+n-p+1}{(n-p+1)p} = \frac{n+1!}{p!(n+1-p)!} = \binom{n+1}{p}$$

Illustration : le triangle de Pascal :

	p – 1		p	
n - 1	$\binom{n-1}{p-1}$	+	$\binom{n-1}{p}$	on ajoute les deux termes de la ligne précédente
n			$= \binom{n}{p}$	

n\p	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

Propriété (formule du binôme de Newton)

Pour tous nombres réels a et b et pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Démonstration : par récurrence sur n (assez complexe)

Remarques : _ Pour trouver les coefficients successifs, il suffit de lire la ligne correspondante du triangle de Pascal.

_ On a aussi : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

Exemples : $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k = (1 + 1)^n = 2^n$$

2.7 Nombre de parties d'un ensemble à n éléments

Propriété : Si card(E) = n, avec $n \in \mathbb{N}$ alors card(P(E)) = 2^n.

Démonstration :
Soient $(x_1, x_2, ..., x_n)$ les éléments de E.
Pour choisir une partie A de E, il faut choisir pour chaque élément, s'il appartient à A ou non.
Il y a deux possibilités pour x_1, 2 pour x_2, …, 2 pour x_n. En tout 2^n possibilités.