

Chapitre 4 : Les suites

Introduction :

Une suite (u_n) peut être définie de trois manières :

- _ une formule explicite de u_n en fonction de n : Ex : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n - 3n$
- _ la valeur initiale et une formule de récurrence : Ex: $u_0 = 5; \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n + 4}{u_n - 1}$
- _ de manière implicite : vue plus tard dans l'année.

Il est beaucoup plus simple de connaître le comportement d'une suite quand on a la formule explicite. Malheureusement, la plupart des suites sont définies par une formule de récurrence.

Pbs :

- _ Comment passer d'une formule de récurrence à une formule explicite ?
- _ Comment étudier une suite sans avoir de formule explicite ?

1. Suites usuelles

Pour certaines suites particulières, on sait passer de la formule de récurrence à la formule explicite. On essaiera de s'y ramener le plus souvent possible.

1.1 Suites arithmétiques

Définition : Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique s'il existe un réel r tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$.

Le nombre r est alors appelé la raison de la suite

Remarque : Dans la pratique, pour montrer qu'une suite est arithmétique, on peut montrer que $u_{n+1} - u_n$ est constant.

Propriété :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique. Alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr$

De manière plus générale, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, u_n = u_p + (n - p)r$

Démonstration par récurrence sur n :

A faire

De plus, comme $u_n = u_0 + nr$ et $u_p = u_0 + pr$ par différence : $u_n - u_p = (n - p)r$

Exemples :

1) A l'année 1, on possède un capital $C_1 = 1000$ euros.

Chaque année, ce capital augmente de 50 euros. Soit C_n le capital au bout de n années.

Déterminer C_n en fonction de n .

$C_{n+1} = C_n + 50$ donc (C_n) est une suite arithmétique de raison 50.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, C_n = C_1 + (n - 1) \times 50 = 1000 + 50(n - 1) = 950 + 50n$

2) Soit (u_n) la suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{1 + u_n}{3 - u_n} \end{cases}$$
 . On admet que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \neq 1$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \frac{1}{1 - u_n}$

Montrer que (v_n) est une suite arithmétique. En déduire l'expression de (v_n) puis de (u_n) .

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \frac{1}{1 - u_{n+1}} = \frac{1}{1 - \frac{1 + u_n}{3 - u_n}} = \frac{1}{\frac{3 - u_n - 1 - u_n}{3 - u_n}} = \frac{3 - u_n}{2 - 2u_n}$$

$$\text{Donc } v_{n+1} - v_n = \frac{3 - u_n}{2 - 2u_n} - \frac{1}{1 - u_n} = \frac{3 - u_n}{2 - 2u_n} - \frac{2}{2 - 2u_n} = \frac{1 - u_n}{2(1 - u_n)} = \frac{1}{2}$$

Donc (v_n) est une suite arithmétique de raison $r = \frac{1}{2}$.

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 + n \times \frac{1}{2} \quad v_0 = \frac{1}{1 - u_0} = -\frac{1}{2} \quad \text{Donc } v_n = \frac{n - 1}{2}$$

$$v_n = \frac{1}{1 - u_n} \Leftrightarrow v_n(1 - u_n) = 1 \Leftrightarrow v_n - u_n v_n = 1 \Leftrightarrow -u_n v_n = 1 - v_n \Leftrightarrow u_n = \frac{v_n - 1}{v_n}$$

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{\frac{n - 1}{2} - 1}{\frac{n - 1}{2}} = \frac{n - 3}{n - 1}$$

1.2 Suites géométriques

Définition : Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique s'il existe un nombre réel q tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = qu_n$.
 q est alors appelé la raison de la suite géométrique.

Remarque : dans la pratique, si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \neq 0$, pour montrer qu'une suite est géométrique, on montre que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant.

Propriété : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q .
 Alors, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 \times q^n \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, u_n = u_p \times q^{n-p}$

Démonstration par récurrence sur n :

Remarque : Inversement, toute suite de la forme $u_n = a \times b^n$ est une suite géométrique de raison b .

Exemple :

L'année 1, on possède un capital $C_1 = 1000$ euros. Chaque année le capital augmente de 5%.

Soit C_n le capital à l'année n . Déterminer C_n .

$\forall n \in \mathbb{N}, C_{n+1} = C_n + 0.05C_n = 1,05C_n$ (C_n) est une suite géométrique de raison $q = 1,05$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, C_n = C_1 \times q^{n-1} = 1000 \times 1,05^{n-1}$

1.3 Suites arithmético-géométriques

Définition :

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique s'il existe deux réels a et b tels que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b$.

Propriété :

Si $a \neq 1$, il existe un unique réel c tel que $c = ac + b$. (c est appelé point fixe de la suite.)

La suite $v_n = u_n - c$ est géométrique de raison a . (c'est-à-dire que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n - c = a^n(u_0 - c)$)

Démonstration :

$$c = ac + b \Leftrightarrow c - ac = b \Leftrightarrow (1 - a)c = b \Leftrightarrow c = \frac{b}{1 - a} \quad (\text{car } a \neq 1)$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = u_{n+1} - c = au_n + b - c = au_n + c - ac - c = au_n - ac = a(u_n - c) = av_n$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison a .

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = a^n \times v_0 \Leftrightarrow u_n - c = a^n(u_0 - c)$.

Exemple : soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n - 2$ et $u_0 = 3$.

1) Recherche du point fixe : $c = 3c - 2 \Leftrightarrow -2c = -2 \Leftrightarrow c = 1$

2) Donc $u_n - 1$ est une suite géométrique de raison 3.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n - 1 = 3^n(u_0 - 1) = 3^n \times 2$ donc $u_n = 1 + 2 \times 3^n$

Remarque : si u_0 est égal au point fixe, alors la suite est constante.

1.4 Suites linéaires récurrentes d'ordre 2

Définition :

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite linéaire récurrente d'ordre 2 s'il existe deux nombres réels a et b avec $b \neq 0$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.

Définition : On appelle équation caractéristique de la suite l'équation : $x^2 = ax + b$

Théorème (admis) :

Soit Δ le discriminant de l'équation caractéristique.

_ Si $\Delta > 0$, soient x_1 et x_2 les racines de l'équation caractéristique. Alors il existe des réels λ et μ tels que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda x_1^n + \mu x_2^n$

_ Si $\Delta = 0$: soit x_0 la racine double de l'équation caractéristique. Alors il existe des réels λ et μ tels que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\lambda n + \mu)x_0^n$

Remarques : _ on détermine λ (lambda) et μ (mu) en utilisant les premiers termes.

_ le cas $\Delta < 0$ n'est pas au programme.

Exemples : 1) On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$ $u_0 = 4$ et $u_1 = 5$:

Equation caractéristique : $r^2 = 5r - 6 \quad r^2 - 5r + 6 = 0 \quad \Delta = 1 \quad x_1 = 2 \quad x_2 = 3$

Donc u est de la forme : $u_n = \lambda 2^n + \mu 3^n$

$$\text{Recherche de } \lambda \text{ et } \mu : \begin{cases} u_0 = \lambda 2^0 + \mu 3^0 = \lambda + \mu = 4 \\ u_1 = \lambda 2^1 + \mu 3^1 = 2\lambda + 3\mu = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 7 \\ \mu = -3 \end{cases}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 7 \times 2^n - 3 \times 3^n$

2) On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$

Equation caractéristique : $r^2 - 4r + 4 = 0 \quad \Delta = 0$ une racine double $x_0 = 2$

u est de la forme : $u_n = (\lambda n + \mu)2^n$

$$\begin{cases} u_0 = (\lambda 0 + \mu)2^0 = \mu = 1 \\ u_1 = (\lambda 1 + \mu)2^1 = 2(\lambda + \mu) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 1 \\ \lambda = -\frac{1}{2} \end{cases} \text{ Donc } \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \left(-\frac{n}{2} + 1\right)2^n.$$

2. Comportement d'une suite numérique

2.1 Majorants, minorants

Définition : On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **majorée** si et seulement s'il existe un nombre réel M (indépendant de n) tel que, pour tout entier n , $u_n \leq M$.

On dit que la suite (u_n) est **minorée** si et seulement s'il existe un nombre réel m (indépendant de n) tel que, pour tout entier n , $u_n \geq m$.

Si la suite (u_n) est minorée et majorée, on dit qu'elle est **bornée**.

Cas classique : Méthode à connaître

Soit u_n une suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

On veut montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq A$ (ou $u_n \geq A$, ou $A \leq u_n \leq B$).

On procède généralement par récurrence.

Pour l'hérédité ($u_n \leq A \Rightarrow u_{n+1} \leq A$), deux méthodes :

_ si u_n n'apparaît qu'une fois dans l'expression $u_{n+1} = f(u_n)$, on peut en général utiliser les inégalités pour passer de u_n à u_{n+1}

_ sinon : on étudie les variations de la fonction f . (souvent déjà fait avant)

Si f est croissante sur un intervalle I et si $u_n \in I$, et $A \in I$ alors $u_n \leq A \Rightarrow f(u_n) \leq f(A)$. $u_{n+1} \leq f(A)$. En général, on arrive au résultat.

Remarque : Pour montrer que $u_n \leq A$, on peut aussi montrer que $u_n - A \leq 0$.

Ex :

Soit v la suite définie par :
$$\begin{cases} v_1 = 2 \\ \forall n \geq 1, v_{n+1} = \frac{2v_n - 9}{v_n - 4} \end{cases}$$
 Montrer que $\forall n \geq 1, v_n \leq 3$

Par récurrence :

_ $v_1 = 2 \leq 3$ donc vraie au rang 1

_ si $v_n \leq 3$ Posons $f(x) = \frac{2x - 9}{x - 4}$ alors $\forall x \neq 4, f'(x) = \frac{2(x - 4) - (2x - 9)}{(x - 4)^2} = \frac{1}{(x - 4)^2} > 0$

Donc f est croissante sur $] -\infty; 4[$. v_n et 3 appartiennent à cet intervalle.

Comme $v_n \leq 3$ $f(v_n) \leq f(3)$ $v_{n+1} \leq 3$ donc la propriété est héréditaire

Conclusion : $\forall n \geq 1, v_n \leq 3$.

Remarque : Soit f une fonction et I un intervalle. Si $f(I) \subset I$, on dit que I est stable par f .

Soit u une suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$
 Si $u_0 \in I$ et si I est stable par f , alors on peut montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$. (par récurrence, à démontrer à chaque fois).

2.2 Sens de variation d'une suite

Définition :

Une suite (u_n) est dite **croissante**, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$.

Une suite (u_n) est dite **décroissante** si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$

Une suite **monotone** est une suite soit croissante, soit décroissante.

Méthodes pour étudier le sens de variation d'une suite :

1) Le plus souvent : Etudier le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$

Ex : $u_n = \frac{1}{n!}$ pour $n \geq 0$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{1 - (n+1)}{(n+1)!} = -\frac{n}{(n+1)!} \leq 0 \text{ donc } (u_n) \text{ est décroissante}$$

2) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$ (ou $u_{n+1} \leq u_n$) (dans le cas où $u_{n+1} = f(u_n)$)

Ex :

Soit u la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$:

_ pour $n = 0$: $u_0 = 0$ $u_1 = \sqrt{2}$ donc $u_0 \leq u_1$

_ supposons que $u_n \leq u_{n+1}$ alors $u_n + 2 \leq u_{n+1} + 2$ $\sqrt{u_n + 2} \leq \sqrt{u_{n+1} + 2}$ $u_{n+1} \leq u_{n+2}$. Donc la propriété est héréditaire.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$ la suite est croissante.

Remarques :

Pour montrer l'hérédité, on aurait pu utiliser la fonction $f(x) = \sqrt{x+2}$.

Sur $] -2; +\infty[$ $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}} > 0$ donc f est croissante.

Donc $u_n \leq u_{n+1} \Rightarrow f(u_n) \leq f(u_{n+1})$ $u_{n+1} \leq u_{n+2}$

_ Attention, pour une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, "f croissante" n'implique pas "u_n croissante" !