1. Calcul de sommes et de produits

1.1 Calculs de sommes

Notation : Soient n et p deux entiers naturels avec $p \leq n$.
Soient $x_p, \ldots, x_n$ des nombres réels.

Alors la somme $x_p + x_{p+1} + \ldots + x_{n-1} + x_n$ se note $\sum_{i=p}^{n} x_i$. (i prend toutes les valeurs entières entre p et n)

$\sum_{i=p}^{n}$: n → dernier terme ; p → premier terme ; i → indice de sommation

Exemples : $3^2 + 4^2 + \ldots + 15^2 = \sum_{i=3}^{15} i^2$ $\qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}$

Remarques :
_ Le nom de l'indice de sommation (ici i) n'a pas d'importance, mais ne doit pas être une variable déjà utilisée. On ne peut en aucun cas le retrouver dans le résultat de la somme !
_ $\sum_{i=p}^{n} x_i$ contient $n - p + 1$ termes.

Exemple : $\sum_{k=2}^{5} k^3 = 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 \longrightarrow$ 4 termes

Propriété : Somme d'une constante (= ne dépend pas de i) :

Soit $a \in \mathbb{R}$ $\qquad \sum_{i=p}^{n} a = (n - p + 1) \times a$

Exemple : $\sum_{i=0}^{n} 3 = (n + 1) \times 3$ $\qquad \sum_{j=1}^{n} x^p = nx^p$

Propriété :
Si $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite de réels, alors

$\sum_{i=1}^{n} u_i = \sum_{i=0}^{n} u_i - u_0$ (pour $n \geq 1$) $\qquad \sum_{i=2}^{n} u_i = \sum_{i=0}^{n} u_i - u_0 - u_1$ (pour $n \geq 2$) etc…

(car $\sum_{i=1}^{n} u_i = u_1 + \ldots + u_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n - u_0 = \sum_{i=0}^{n} u_i - u_0$)

A RETENIR : $\sum_{i=0}^{n+1} u_i = \sum_{i=0}^{n} u_i + u_{n+1}$ (car $\sum_{i=0}^{n+1} u_i = u_0 + \ldots + u_n + u_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} u_i + u_{n+1}$)

Exemple : Posons pour tout $n \geq 1$, $S_n = \sum_{i=1}^{n} 2^i$

Alors $S_n = \sum_{i=0}^{n} 2^i - 2^0 = \sum_{i=0}^{n} 2^i - 1$ $\quad S_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} 2^i = \sum_{i=1}^{n} 2^i + 2^{n+1}$

Propriété :
Si (a_i) et (b_i) sont des familles de réels. et λ un réel ne dépendant pas de i, alors :

$$\sum_i (a_i + b_i) = \sum_i a_i + \sum_i b_i \qquad \sum_i (\lambda a_i) = \lambda \sum_i a_i$$

Attention : $\sum_i (a_i b_i) \neq \left(\sum_i a_i\right)\left(\sum_i b_i\right)$!

A retenir : on peut sortir un facteur de la somme s'il ne dépend pas de l'indice de sommation !

1.2 Sommes usuelles

Propriété : Formules à connaître !

Pour tout $n \geq 1$

$$\left.\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} k &= \frac{n(n+1)}{2} \\ &(1 + 2 + \ldots + n) \\ \sum_{k=0}^{n} k^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) \\ \sum_{k=0}^{n} k^3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} \\ &(1^3 + 2^3 + \ldots + n^3) \end{aligned}\right\} \text{vraie aussi à partir de 0}$$

si $q \neq 1$, $\sum_{k=0}^{n} q^k = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ (vraie seulement à partir de 0)
$(1 + q + q^2 + \ldots + q^n)$

Démonstration : On démontrera toutes ces formules à l'aide d'un raisonnement par récurrence.

Exemples :

1) Calcul de $\sum_{k=0}^{n} (k^2 + 2k + 3) = \sum_{k=0}^{n} k^2 + 2\sum_{k=0}^{n} k + 3\sum_{k=0}^{n} 1 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} + n(n+1) + 3(n+1)$

$= \dfrac{(n+1)}{6}(n(2n+1) + 6n + 18) = \dfrac{(n+1)(2n^2 + 7n + 18)}{6}$

2) Calcul de $S_n = \sum_{k=1}^{n+3} \frac{2}{3^k}$: $S_n = 2 \sum_{k=1}^{n+3} \left(\frac{1}{3}\right)^k = 2 \left(\sum_{k=0}^{n+3} \left(\frac{1}{3}\right)^k - \left(\frac{1}{3}\right)^0\right) = 2 \times \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+4}}{1 - \frac{1}{3}} - 1\right)$

$S_n = 2\times\frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3^{n+4}}\right) - 2 = 3 \ - \frac{1}{3^{n+3}}$

1.3 Changement d'indice

Soit S une somme d'indice i. $S = \sum_{i=debut}^{fin} x_i$

Pour se ramener à une formule connue et se ramener à 0, il faut parfois changer d'indice en posant j = i + r ou j = -i + r, où r est un entier relatif. Il faut alors changer l'indice dans l'expression et dans les deux bornes.

Ex : $S = \sum_{i=3}^{12} 4^{i-3}$ on pose j = i – 3 (donc i = j + 3) $S = \sum_{j=0}^{9} 4^j = \frac{1-4^{10}}{1-4} = \frac{4^{10}-1}{3}$

Attention, des changements d'indice du type j = 2i, j = 2i+1 ne sont pas possibles !

Sommes télescopiques :
Principe : Soit f une fonction définie sur $\mathbb{N}$.

On considère une somme de la forme $\sum_{k} (f(k+1) - f(k))$. Alors, les termes successifs se simplifient (à l'aide d'un changement d'indice ou en écrivant à l'aide de pointillés)

Exemple :
$\sum_{k=0}^{n} \left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) = \sum_{k=0}^{n} \sqrt{k+1} - \sum_{k=0}^{n} \sqrt{k} = (\sqrt{1} + \ldots + \sqrt{n} + \sqrt{n+1}) - (\sqrt{0} + \sqrt{1} + \ldots + \sqrt{n}) = \sqrt{n+1} - \sqrt{0} = \sqrt{n+1}$

Ou : $= \sum_{k=0}^{n} \sqrt{k+1} - \sum_{k=0}^{n} \sqrt{k} = (k' = k+1) \sum_{k'=1}^{n+1} \sqrt{k'} - \sum_{k=0}^{n} \sqrt{k} = \sum_{k=1}^{n+1} \sqrt{k} - \sum_{k=0}^{n} \sqrt{k} = \sqrt{n+1} - \sqrt{0} = \sqrt{n+1}$

1.4 Sommes doubles

On considère une famille $(u_{i,j})_{i \in \{1...n\},\, j \in \{1..p\}}$ de nombres réels.

$u_{1,1}$	…	$u_{1,j}$	…	$u_{1,p}$
…		…		…
$u_{i,1}$	…	$u_{i,j}$	…	$u_{i,p}$
…		…		…
$u_{n,1}$	…	$u_{p,j}$	…	$u_{n,p}$

La somme de tous ces termes est notée : $\sum_{(i,j) \in \{1..n\}\times\{1..p\}} u_{i,j}$

Propriété (Formule d'interversion des sommes) $\displaystyle\sum_{(i,j)\,\in\,\{1..n\}\times\{1..p\}} u_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} u_{i,j} = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} u_{i,j}$

Exemple :

$$\sum_{(i,j)\,\in\,\{1..n\}\times\{1..p\}} i\times j = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} i\times j\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(i\sum_{j=1}^{p} j\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(i\times\frac{p(p+1)}{2}\right) = \frac{p(p+1)}{2}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{p(p+1)n(n+1)}{4}$$

<u>Sommes triangulaires :</u>
On suppose ici que n = p. On obtient un tableau carré :

$u_{1,1}$	$u_{1,2}$	…	$u_{1,n}$
$u_{2,1}$	$u_{2,2}$	…	$u_{2,n}$
…	…		…
$u_{n,1}$	$u_{n,2}$	…	$u_{n,n}$

La somme des termes encadrés est notée $\displaystyle\sum_{1\le i\le j\le n} u_{i,j}$

Propriété : $\displaystyle\sum_{1\le i\le j\le n} u_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} u_{i,j}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} u_{i,j}\right)$
(on fixe un des indices entre 1 et n, puis on fait varier l'autre en fonction du premier)

Exemple :
Calcul de $\displaystyle\sum_{1\le i\le j\le n} i\times j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} i\times j = \sum_{j=1}^{n}\left(j\sum_{i=1}^{j} i\right) = \sum_{j=1}^{n} j\times\frac{j(j+1)}{2} = \sum_{j=1}^{n}\frac{j^3+j^2}{2}$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) = \frac{1}{24}\left[n(n+1)[3n(n+1) + 2(2n+1)]\right] = \frac{1}{24}n(n+1)(3n^2+7n+2)$$

1.4 Calcul de produits

Notation : si $u_1, u_2, ..., u_n$ sont des nombres réels alors $u_1\times u_2\times ...\times u_n$ est noté $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} u_i$.

Définition (Factorielle) : 0 ! = 1

pour tout $n\in\mathbb{N}$, $n\ge 1$, $\displaystyle n\,! = \prod_{k=1}^{n} k$

Exemple : $4\,! = 1\times 2\times 3\times 4 = 24$

Remarque : $\forall n\in\mathbb{N}$, $(n+1)! = (n+1)\times n!$

2. Le raisonnement par récurrence

2.1 Quelques éléments de logique

Une proposition est une affirmation qui peut être vraie ou fausse.

Notations :
« pour tout élément de » se note $\forall$
« il existe un élément » se note $\exists$

Exemples :
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$ s'écrit aussi $\forall\ x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$. Cette proprostion est vraie.
Il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 = 2$ s'écrit aussi $\exists\ x \in \mathbb{R}, x^2 = 2$. Cette proprosition est vraie.
Mais par exemple $\exists\ x \in \mathbb{N}, x^2 = 2$ est faux.

Attention à ne pas confondre implication et équivalence :
implication : $A \Rightarrow B$: si A est vrai, alors B est vrai (mais B peut être vrai sans que A le soit)
équivalence : $A \Leftrightarrow B$: A est vrai si et seulement si B est vrai.

Exemples :
_ $x > 3 \Rightarrow x > 0$ _ $x = 3 \Rightarrow x^2 = 9$
_ $e^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln(3)$

2.2 Principe du raisonnement par récurrence

Axiome de récurrence :

Soit P_n une proposition qui dépend d'un entier naturel n.
Si 1) P_0 est vraie (initialisation)
2) si on suppose P_n vraie à un rang n quelconque, alors P_{n+1} est vraie ($P_n \Rightarrow P_{n+1}$) (hérédité)
Alors pour tout $n \geq 0$, P_n est vraie.

Vocabulaire : _ Supposer P_n vraie est l'hypothèse de récurrence.
_ Montrer que "si P_n est vraie alors P_{n+1} est vraie", c'est montrer que la propriété est héréditaire.

Schéma

Remarques :
1) C'est à vous de voir qu'il faut utiliser un raisonnement par récurrence. Ce n'est en général pas marqué dans l'énoncé.
2) Quand faire une relation par récurrence ?
- pour une question où la propriété <u>dépend d'un entier</u> (n très souvent) et où le résultat est donné dans l'énoncé ("Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, …. "), ou trouvé à l'aide d'une conjecture.
- quand on a une "relation de récurrence", qui permet de passer du rang n au rang n + 1

- en général, le résultat à démontrer n'est pas une relation de récurrence, mais une relation explicite au rang n.
3) Dans l'initialisation, calculer séparément les deux termes de l'égalité (ou de l'inégalité) puis vérifier vraiment la relation.
4) Dans l'hypothèse de récurrence, on suppose que la propriété est vraie <u>à un rang n,</u> et non pas pour tout n.
Pour montrer P(n+1), il ne faut pas remplacer n par n+1 dans P(n), mais bien montrer que la propriété est vraie !
5) Souvent, il faut montrer la propriété à partir d'un certain rang n_0. Dans ce cas, il faut faire l'initialisation pour n_0.

Utilisations classiques :

1) (u_n) est une suite définie par $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = f(u_n) \ \forall\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

Exemple :

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2; \forall\ n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + 3$.

Montrons que $\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_n \leq 6$.
_ Initialisation : $u_0 = 2 \leq 6$ P_0 est vraie
_ Hypothèse de récurrence : supposons que P_n est vraie, c'est-à-dire $u_n \leq 6$
Alors $\frac{1}{2} u_n \leq 3$ $\frac{1}{2} u_n + 3 \leq 6$ $u_{n+1} \leq 6$ donc P_{n+1} est vraie. La propriété est héréditaire.
_ Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq 6$.

2) S_n est une somme des termes d'une suite : $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \sum_{i=0}^{n} u_i$

On veut montrer une formule sur S_n.

_ Pour l'initialisation, remarquez que $S_0 = \sum_{i=0}^{0} u_i = u_0$

_ Pour l'hérédité, remarquez que $S_{n+1} = S_n + u_{n+1}$

Exemple :

Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N},\ \sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

1) Initialisation : pour n = 0 :

$\sum_{i=0}^{0} i^2 = 0^2 = 0$ $\frac{0(0+1)(2\times 0+1)}{6} = 0$ donc P_0 est vraie.

2) On suppose que P_n est vraie : $\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Alors $\sum_{i=0}^{n+1} i^2 = \sum_{i=0}^{n} i^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$ (d'après l'hypothèse de récurrence)

$$= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)(2n^2 + n + 6n + 6)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6}$$

Or $(n+2)(2(n+1)+1) = (n+2)(2n+3) = 2n^2 + 3n + 4n + 6 = 2n^2 + 7n + 6$.

Donc $\sum_{i=0}^{n+1} i^2 = \dfrac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}$ donc P_{n+1} est vraie.
3) Conclusion : (P_n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

2.3 Récurrence à deux rangs

Propriété :
Soit P(n) une proposition qui dépend d'un entier n. Si :
1) P(0) et P(1) sont vraies.
2) Si on suppose P(n) et P(n + 1) vraies, alors P(n + 2) est vraie.
Alors P(n) est vraie pour tout $n \geq 0$.

Exemple :
Soit la suite définie par : $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et par la relation de récurrence : $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.
(on a : $F_2 = F_1 + F_0 = 1$, $F_3 = F_2 + F_1 = 2$, $F_4 = F_3 + F_2 = 3$, ...)
Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n < 2^n$

1) Initialisation :
$F_0 = 0 \quad 2^0 = 1$ donc P(0) est vraie. $\qquad F_1 = 1 \quad 2^1 = 2 \ 1 < 2$ donc P(1) est vraie.
2) On suppose que P(n) et P(n + 1) sont vraies : $F_n < 2^n$ et $F_{n+1} < 2^{n+1}$
Alors $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n < 2^{n+1} + 2^n$
$F_{n+2} < 2\times 2^n + 2^n \quad F_{n+2} < 3\times 2^n$
Or $2^{n+2} = 2^n \times 4$. donc $F_{n+2} < 2^{n+2}$.
3) Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n < 2^n$