Chapitre 24 : Fonctions à deux variables

1. L'ensemble $\mathbb{R}^2$

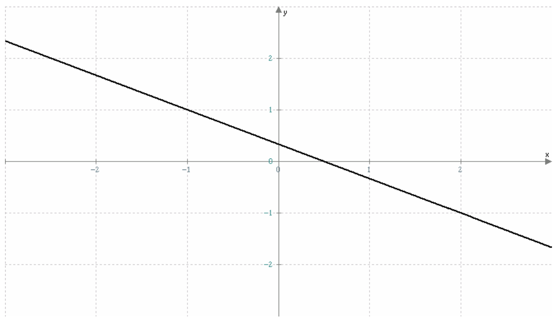
Un élément (x ;y) de $\mathbb{R}^2$ peut être identifié au point M du plan de coordonnées (x ;y) dans un repère. $\mathbb{R}^2$ sera donc souvent assimilé au plan.

1.1 Equations de droite et de cercle (rappels)

Propriété :
Soient a, b,c des réels tels que $(a,b) \neq (0,0)$.
Alors l'ensemble des points M(x ;y) du plan tels que $ax + by + c = 0$ est une droite.

Cas particuliers :
_ droite d'équation $x = x_0$: droite parallèle à l'axe des ordonnées
_ droite d'équation $y = y_0$: droite parallèle à l'axe des abscisses
_ droite d'équation $y = mx + p$: droite de pente m, et d'ordonnée à l'origine p.

Exemple :
(D) : $2x + 3y - 1 = 0 \Leftrightarrow 3y = -2x + 1$
$\Leftrightarrow y = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{3}$ pente : $-\dfrac{2}{3}$



Propriété : Soient a,b des réels et R un réel positif.
Alors l'ensemble des points M(x ;y) du plan tels que $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ est le cercle de centre Ω(a ;b) et de rayon R.

Exemples :
_ cercle de centre A(1 ;-2) et de rayon 2 : équation : $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = 4 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$
_ soit l'ensemble d'équation $x^2 + y^2 - 6x - 5y + 3 = 0$

$x^2 - 6x + y^2 - 5y + 3 = 0$

$(x - 3)^2 - 9 + (y - 5/2)^2 - 25/4 + 3 = 0$ (mise sous forme canonique)

$(x - 3)^2 + (y - 5/2)^2 = 49/4 = (7/2)^2$

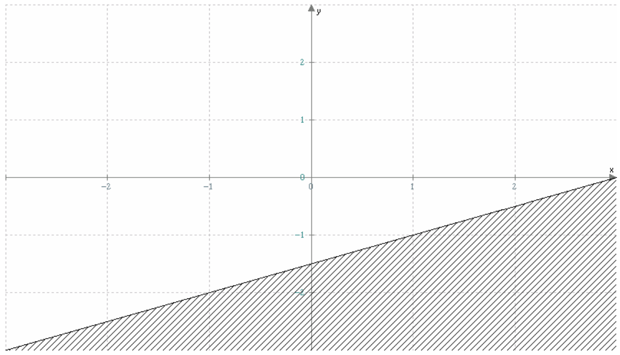
Donc E est le cercle de centre A(3 ;5/2) et de rayon 7/2.

1.2 Demi-plan et disques

Définition :
Soient a, b, c des réels tels que $(a,b) \neq (0,0)$. L'ensemble des points M(x ;y) tels que $ax + by + c \geq 0$ est appelé demi-plan fermé de $\mathbb{R}^2$ de frontière la droite d'équation $ax + by + c = 0$.
L'ensemble défini par $ax + by + c > 0$ est appelé demi-plan ouvert.

Remarque : Pour préciser entre les deux demi-plans,
_ essayer avec un point particulier, par exemple (0 ;0) (sauf s'il est sur la frontière).
_ $y \geq mx + p \longrightarrow$ au-dessus de la droite, $y \leq mx + p \longrightarrow$ en-dessous.

Exemple : $x - 2y - 3 > 0 \Leftrightarrow -2y > -x + 3$
$\Leftrightarrow y < \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$
demi-plan de frontière la droite d'équation
$y = x/2 - 3/2$



Définition :
Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $R \geq 0$.
L'ensemble des points $M(x\,;y)$ vérifiant $(x - a)^2 + (y - b)^2 < R^2$ est appelé le disque ouvert (ou la boule ouverte) de centre $(a\,;b)$ et de rayon R.
L'ensemble des points $M(x\,;y)$ vérifiant $(x - a)^2 + (y - b)^2 \leq R^2$ est appelé le disque fermé (ou boule fermée).

2. Définition et représentations d'une fonction à deux variables

2.1 Définition

Définition :
Soit D une partie de $\mathbb{R}^2$. Une fonction $f : \begin{cases} D \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto f(x,y) \end{cases}$ est appelée fonction à deux variables.

Exemples : $f : (x\,;y) \longmapsto x^2 - xy + 2y^2$ définie sur $\mathbb{R}^2$
$g : (x,y) \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ définie sauf si $x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ et $y = 0$.

Définition : Soit $f\ D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction à deux variables.
Soit $(x_0, y_0) \in D$. On dit que f admet un maximum en (x_0, y_0) si $\forall (x, y) \in D$, $f(x,y) \leq f(x_0, y_0)$
minimum $f(x,y) \geq f(x_0, y_0)$.

Exemple :
Soit $f(x\,,y) = x^2 + (y - 1)^2 + 2$. f admet-t-il un minimum ?
$\forall\ x, y \in \mathbb{R}^2$, $x^2 \geq 0$ et $(y - 1)^2 \geq 0$ donc $f(x,y) \geq 2$.
De plus $f(x,y) = 2 \Leftrightarrow x = 0$ et $y - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$ donc f admet comme minimum 2 en $(0,1)$.

2.2 Représentation graphique

Rappel :
Une fonction f à une variable est représentée par une courbe dans le plan.
La courbe est l'ensemble des points $M(x\,;y)$ tels que $x \in D_f$ et $y = f(x)$.

Une fonction f à deux variables est représentée par une **surface** dans l'espace.
La surface est l'ensemble des points $M(x\,;y\,;z)$ tels que $(x\,;y) \in D_f$ et $z = f(x\,;y)$.
(Dessin : feuille en +)

2.3 Lignes de niveau

Définition : Soit f une fonction définie sur $D_f \subset \mathbb{R}^2$.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. L'ensemble des points M(x ;y) du plan tels que $f(x,y) = \lambda$ est appelé ligne de niveau λ de f. (C'est l'intersection de la surface avec le plan d'équation $z = \lambda$).

Exemple : carte IGN, carte météo (isotherme, isobare)

3. Calcul différentiel

Rappel :
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Si f est dérivable, on note aussi $\frac{df}{dx}$ sa dérivée.
Exemple : si $f(x) = x^2 + \ln(x)$ $\frac{df}{dx}(x) = 2x + \frac{1}{x}$.

3.1 Applications partielles

Définition : Application partielle :
Soit f $D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
Soit $y_0 \in \mathbb{R}$, fixé. On appelle 1ère application partielle l'application $f(.,y_0) : x \longmapsto f(x,y_0)$ (définie si $(x,y_0) \in D$).
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On appelle 2ème application partielle l'application $f(x_0,.) : y \longmapsto f(x_0,y)$.

Exemple : $f(x,y) = x + y^2/x$
$f(.,2) : x \longmapsto x + \frac{4}{x}$ $f(1,.) : y \longmapsto 1 + y^2$.

3.2 Dérivées partielles

Définition :
Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}$.
_ si la fonction $f(.,y_0)$ est dérivable en x_0, alors on dit que f admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à x en (x_0, y_0). La dérivée est noté $f'_x(x_0,y_0)$ ou $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ (« drond f sur drond x »)
_ si la fonction $f(x_0,.)$ est dérivable en x_0, alors on dit que f admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à y en (x_0,y_0). La dérivée est notée $f'_y(x_0, y_0)$ ou $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

Explication :
Si on considère que y est une constante, f(x,y) est une fonction de x, qu'on peut dériver par rapport à x. Sa dérivée est notée $\frac{\partial f}{\partial x}$.
De même, si on considère que x est une constante, on peut dériver par rapport à y : on obtient $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Exemple :
$f\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}\ ;(x,y) \longmapsto x^2(y + 1) + y^3$

f admet des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(x\ ,y) = 2x(y + 1)$ $\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x\ ;y) = x^2 + 3y^2$.

Définition :
Soit $f\ D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ qui admet des dérivées partielles en tout point.

On appelle point critique de f tout point $(x_0, y_0) \in D$ tel que $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$

Remarque : On verra en deuxième année, qu'à certaines conditions sur f, les extrema de f sont des points critiques.

Exemple :
$\begin{cases} 2x(y + 1) = 0 \\ x^2 + 3y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ou } y = -1 \\ x^2 + 3y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = -1 \\ x^2 = -3 \end{cases}$ (impossible). Le seul point critique est (0;0).

3.3 Dérivées partielles secondes

Définition :
Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.
Si, sur D, f admet des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$, et si ces fonctions admettent elles-mêmes des dérivées partielles, on dit que f admet des dérivées partielles d'ordre 2, et on note :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Exemple :
$f(x,y) = x^2y + y^3 \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x;y) = 2y \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 2x$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 + 3y^2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2x \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 6y$

Remarque : On verra en deuxième année qu'à certaines conditions sur f,
$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.