

## Chapitre 23 Intégration sur un segment

### 1. Primitives d'une fonction continue

#### 1.1 Notion de primitive

Définition : Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ . On appelle primitive de  $f$  sur  $I$  toute fonction  $F$  dérivable sur  $I$  et telle que  $F' = f$ .

Exemple : Soit  $f(x) = (2x - 5)e^{2x}$  sur  $\mathbb{R}$ .

Montrer que  $F(x) = (x - 3)e^{2x}$  est une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

$F$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $F'(x) = 1 \times e^{2x} + (x - 3)2e^{2x} = (1 + 2x - 6)e^{2x} = f(x)$ . Donc  $F$  est une primitive de  $f$ .

Théorème :

Si  $f$  est une fonction continue sur un intervalle  $I$ , alors  $f$  admet des primitives sur  $I$ .

Dans ce cas, si  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $I$ , alors les primitives de  $f$  sur  $I$  sont les fonctions de la forme  $x \mapsto F(x) + k$ , avec  $k$  réel.

Démonstration :

Existence : admis

\_ Soit  $G$  une autre primitive de  $f$ , alors  $(G - F)' = G' - F' = f - f = 0$

Donc  $G - F$  est constante sur  $I$  : il existe  $k \in \mathbb{R}$  tel que  $G(x) = F(x) + k$  pour tout  $x \in I$ .

\_ Inversement soit  $G$  une fonction telle que  $G(x) = F(x) + k$  avec  $k \in \mathbb{R}$ .

Alors  $G'(x) = F'(x) = f$  donc  $G$  est une primitive de  $f$ .

#### 1.2 Primitives des fonctions usuelles

Si $f(x) =$	Une primitive $F$ de $f$ est :	sur
$f(x) = 1$	$F(x) = x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{x^2}{2}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x}$	$] -\infty; 0[$ ou $] 0; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$	$] 0; +\infty[$
$f(x) = x^\alpha, \alpha \neq -1$	$F(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	selon $\alpha$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln( x )$ $\ln(x)$ sur $] 0; +\infty[$ $\ln(-x)$ sur $] -\infty; 0[$	$] -\infty; 0[$ ou $] 0; +\infty[$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$	$\mathbb{R}$

Ex : primitives de  $f(x) = \frac{1}{x^3} = x^{-3}$  :  $F(x) = \frac{1}{-3+1} x^{-3+1} + k = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{x^2}$

$f(x) = x\sqrt{x} = x^{3/2}$   $F(x) = \frac{1}{\frac{3}{2}+1} x^{3/2+1} = \frac{2}{5} x^{5/2} = \frac{2}{5} x^2 x^{1/2} = \frac{2}{5} x^2 \sqrt{x}$

### 1.3 Primitives et opérations

Propriété :

Soit  $u$  et  $v$  deux fonctions définies sur un intervalle  $I$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Si  $U$  est une primitive de  $u$  et  $V$  une primitive de  $v$ , alors  $U + V$  est une primitive de  $u + v$ .

Si  $U$  est une primitive de  $u$  alors  $\alpha U$  est une primitive de  $\alpha u$ .

Remarque : Attention  $u \cdot v$  n'a pas pour primitive  $U \cdot V$  !!

Exemples :

$$x^2 + e^x \longrightarrow \frac{x^3}{3} + e^x$$

Mais  $x^2 e^x$  n'a pas pour primitive  $\frac{x^3}{3} e^x$

Propriété :

Soit  $u$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ . Alors

Si $f$ est définie sur $I$ par :	Une primitive $F$ de $f$ sur $I$ est :
$f = u' \times u$	$F = \frac{1}{2} u^2$
$f = \frac{u'}{u^2}$ ( $u$ ne s'annulant pas sur $I$ )	$F = -\frac{1}{u}$
$f = \frac{u'}{\sqrt{u}}$ ( $u$ ne s'annulant pas sur $I$ )	$F = 2\sqrt{u}$
$f = u' \times u^\alpha$ , $\alpha \in \mathbb{R}$ , $\alpha \neq -1$	$F = \frac{1}{\alpha + 1} u^{\alpha+1}$
$f = \frac{u'}{u}$	$F = \ln( u )$
$f = u' e^u$	$F = e^u$

Remarques :

- \_ Il est souvent utile de multiplier et diviser par un même nombre pour faire apparaître  $u'$ .
- \_ Si vous n'êtes pas sûr de votre primitive, redérivez pour vérifier !

Exemples :

$$f(x) = (2x - 1)^3 \quad \text{Si on pose } u(x) = 2x - 1 \text{ alors } u'(x) = 2.$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times (2x - 1)^3 = \frac{1}{2} u'(x) \times u(x)^3$$

$$\text{Donc } F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} (2x - 1)^4 = \frac{1}{8} (2x - 1)^4$$

$$g(x) = \frac{3}{5 - 4x} \text{ sur } ]\frac{5}{4}; +\infty[ \quad \text{si on pose } u(x) = 5 - 4x \text{ alors } u'(x) = -4.$$

$$g(x) = 3 \times -\frac{1}{4} \times \frac{-4}{5 - 4x} \quad G(x) = -\frac{3}{4} \ln(|5 - 4x|) = -\frac{3}{4} \ln(4x - 5)$$

## 2. Intégrale sur un segment

### 2.1 Intégrale d'une fonction continue

Propriété - Définition :

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$ , et  $a, b$  des éléments de  $I$ .

Soit  $F$  une primitive de  $f$ . Alors le nombre  $F(b) - F(a)$  est indépendant du choix de  $F$ .

Ce nombre est appelé intégrale de  $f$  sur entre  $a$  et  $b$ , et est noté :  $\int_a^b f(x)dx$

On a donc :  $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

Démonstration : si  $G$  est une autre primitive,  $G(x) = F(x) + k$ ,  $k \in \mathbb{R}$

Donc  $G(b) - G(a) = (F(b) + k) - (F(a) + k) = F(b) - F(a)$

Exemple :  $\int_0^1 x^2 dx = \left[ \frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3} \times 1^3 - \frac{1}{3} \times 0^3 = \frac{1}{3}$

Remarques :

\_ si  $a \leq b$ ,  $\int_a^b f(x)dx$  est appelée l'intégrale de  $f$  sur  $[a;b]$ .

\_ Attention :  $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$   
fonction primitive

\_ n'oubliez pas de mettre une parenthèse (si besoin) devant  $F(a)$

\_ attention, en aucun cas le résultat de  $\int_a^b f(x)dx$  ne dépend de  $x$  !

### 2.2 Interprétation graphique

Définition :

Soit  $f$  une fonction continue et positive sur un intervalle  $[a ; b]$  ( $a \leq b$ ) et  $C_f$  sa courbe représentative.

On appelle aire sous la courbe  $C_f$  sur l'intervalle  $[a; b]$ , l'aire du domaine  $D$  limité par l'axe des abscisses, la courbe  $C$  et les droites d'équation  $x = a$  et  $x = b$ .

(Le domaine  $D$  est l'ensemble des points  $M(x ; y)$  tels que  $a \leq x \leq b$  et  $0 \leq y \leq f(x)$ )

Propriété :

Soit  $f$  une fonction continue et positive sur  $[a;b]$ . Alors l'aire sous la courbe de  $f$  (exprimée en unités d'aire) est égale à  $\int_a^b f(x)dx$ .

Ex :  $f(x) = x^2$  sur  $[0;1]$ . (courbe) Aire<sub>hachurée</sub> =  $\frac{1}{3}$  u.a.

Si l'échelle est : 4 cm en abscisse, 6 cm en ordonnées : 1 u.a. = 24 cm<sup>2</sup>

Aire =  $\frac{1}{3} \times 24 = 8$  cm<sup>2</sup>

### 2.3 Propriétés de l'intégrale

Propriété :

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$  et  $a, b, c \in I$ .

Alors  $\int_b^a f(x)dx = - \int_a^b f(x)dx$

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx. \text{ (relation) de Chasles}$$

Démonstration : si  $F$  est une primitive de  $f$  :

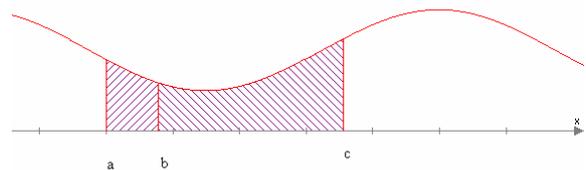
$$\int_b^a f(x)dx = [F(x)]_b^a = F(a) - F(b) = - (F(b) - F(a)) = - \int_a^b f(x)dx$$

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx &= [F(x)]_a^b + [F(x)]_b^c = F(b) - F(a) + F(c) - F(b) = F(c) - F(a) \\ &= \int_a^c f(x)dx. \end{aligned}$$

Interprétation graphique :

Si  $a \leq b \leq c$  et si  $f$  est positive sur  $[a;c]$  :

$$A_{a,c} = A_{a,b} + A_{b,c}$$



Remarque :

On a donc aussi :  $\int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$

Exemple : Pour  $n \geq 1$ , soit  $I_n = \int_1^n \frac{x}{\ln(x)} dx$ . Simplifier  $I_{n+1} - I_n$

$$I_{n+1} - I_n = \int_1^{n+1} \frac{x}{\ln(x)} dx - \int_1^n \frac{x}{\ln(x)} dx = \int_n^{n+1} \frac{x}{\ln(x)} dx$$

Propriété : Linéarité de l'intégrale.

Soit  $f, g$  deux fonctions continues sur un intervalle  $I$  et  $a, b \in I$ . Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Alors  $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

$$\int_a^b (\lambda f(x))dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$$

Démonstration : Si  $F$  est une primitive de  $f$  et  $G$  une primitive de  $g$ , alors  $F + G$  est une primitive de  $f + g$ , donc :

$$\begin{aligned} \int_a^b (f(x) + g(x))dx &= [F(x) + G(x)]_a^b = F(b) + G(b) - (F(a) + G(a)) = F(b) - F(a) + G(b) - G(a) \\ &= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda F \text{ est une primitive de } \lambda f, \text{ donc : } \int_a^b (\lambda f(x))dx &= [\lambda F(x)]_a^b = \lambda F(b) - \lambda F(a) = \lambda(F(b) - F(a)) \\ &= \lambda \int_a^b f(x)dx \end{aligned}$$

Remarque : Attention,  $\int_a^b f(t)g(t)dt \neq \int_a^b f(t)dt \times \int_a^b g(t)dt !!$

## 2.4 Intégrales et ordre

Propriété : Positivité de l'intégrale

Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a;b]$ ,  $a \leq b$  Si  $\forall x \in [a;b], f(x) \geq 0$  alors  $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

Démonstration : Soit  $F$  une primitive de  $f$  sur  $[a;b]$ . Alors  $\forall x \in [a;b], F'(x) = f(x) \geq 0$ , donc  $F$  est croissante sur  $[a;b]$ . Donc  $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \geq 0$ .

Propriété : Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur  $[a;b]$ .

Si pour tout  $x \in [a;b], f(x) \leq g(x)$ , alors  $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

Démonstration : Posons  $h(x) = g(x) - f(x)$  sur  $[a;b]$ . Alors  $\forall x \in [a;b], h(x) \geq 0$ .

Donc par positivité de l'intégrale,  $\int_a^b h(x)dx \geq 0$ .  $\int_a^b (g(x) - f(x))dx \geq 0$

$$\int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx \geq 0 \quad \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

Définition : Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a;b]$ .

Le nombre  $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$  est appelé la valeur moyenne de  $f$  sur  $[a;b]$ .

Propriété : Inégalité de la moyenne :

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $[a;b]$  ( $a \leq b$ )

S'il existe deux réels  $m$  et  $M$  tels que pour tout  $x \in [a;b], m \leq f(x) \leq M$ ,

alors  $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$ .

Démonstration :  $\forall x \in [a;b] \quad m \leq f(x) \leq M$

$$\text{donc } \int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M dx \quad [mx]_a^b \leq \int_a^b f(x)dx \leq [Mx]_a^b$$

$$mb - ma \leq \int_a^b f(x)dx \leq Mb - Ma \quad m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

Remarques : \_ L'inégalité de la moyenne est le même théorème que l'inégalité des accroissements finis, décalé d'un rang.

\_ autrement dit :  $m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq M$

Propriété : Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a;b]$ . Alors  $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

Démonstration :  $\forall y \in \mathbb{R}, -|y| \leq y \leq |y|$  Donc  $\forall x \in [a;b], -|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$

Donc  $\int_a^b -|f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx$  -  $\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx$  donc

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

Remarques :

\_ Attention, dans toutes ces propriétés, il faut que  $a \leq b$  !

\_ pour montrer une inégalité sur une intégrale, on trouve d'abord une inégalité sur la fonction à intégrer (soit avec une constante, soit avec une fonction qu'on sait intégrer), puis on utilise un des théorèmes sur l'ordre.

Exemples : 1) Soit  $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx$ . Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$

\_  $\forall x \in [0;1] \frac{x^n}{1+x^n} \geq 0$  donc  $I_n \geq 0$ .

\_  $\forall x \in [0;1] 1+x^n \geq 1$  donc  $\frac{1}{1+x^n} \leq 1$   $\frac{x^n}{1+x^n} \leq x^n$  donc  $I_n \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$

Donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$ .

2) Montrer que :  $\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{k}$ .

$\forall x \in [k; k+1], k \leq x \leq k+1 \quad \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k}$

Donc, d'après l'inégalité de la moyenne :  $\frac{1}{k+1}(k+1-k) \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{k}(k+1-k)$

$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{k}$

### 3. Méthodes pour calculer une intégrale

#### 3.1 Intégrations par parties

Théorème : Soient  $u$  et  $v$  deux fonctions de classe  $C^1$  sur un intervalle  $I$ .

Pour tous réels  $a$  et  $b$  de  $I$ , on a :  $\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$

Démonstration : Les fonctions  $u, v, u'$  et  $v'$  sont continues

De plus :  $\int_a^b (u(x)v'(x) + u'(x)v(x))dx = \int_a^b (u(x)v(x))'dx = [u(x)v(x)]_a^b$  d'où la formule.

Remarques :

\_ L'intégration par parties permet de calculer l'intégrale d'un produit.

\_ Il y a deux choix pour  $u$  et  $v$  : attention à choisir celui qui simplifie le problème (avec  $\ln \rightarrow$  on dérive le  $\ln$ , un polynôme avec une exponentielle  $\rightarrow$  on dérive le polynôme).

\_ il faut parfois faire apparaître le produit : Ex :  $\ln(x) = 1 \times \ln(x)$ .

\_ pour des suites d'intégrales, une intégration par parties permet souvent de trouver une relation de récurrence.

Exemple :

$I = \int_1^2 (x+1)\ln(x)dx$  :

On pose  $u(x) = \ln(x)$   $v'(x) = x+1$

On en déduit  $u'(x) = \frac{1}{x}$   $v(x) = \frac{x^2}{2} + x$  ( $u$  et  $v$  sont  $C^1$  sur  $[1;2]$ )

$I = \left[ \left( \frac{x^2}{2} + x \right) \ln(x) \right]_1^2 - \int_1^2 \left( \frac{x^2}{2} + x \right) \frac{1}{x} dx$

$= 4\ln(2) - 0 - \int_1^2 \left( \frac{x}{2} + 1 \right) dx = 4\ln(2) - \left[ \frac{x^2}{4} + x \right]_1^2 = 4\ln(2) - \left( 3 - \frac{5}{4} \right) = 4\ln(2) - \frac{7}{4}$ .

#### 3.2 Changement de variables

Propriété : Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$  et  $a, b \in I$ .

Soit  $g$  une fonction de classe  $C^1$  sur un intervalle  $J$  et bijective de  $J$  sur  $I$ .

$$\text{Alors } \int_{x=a}^{x=b} f(x)dx = \int_{y=g^{-1}(a)}^{y=g^{-1}(b)} f(g(y)) \times g'(y) dy$$

Démonstration :  $f, g$  et  $g'$  sont continues, donc  $y \mapsto f(g(y))g'(y)$  est continue.

Si  $F$  est une primitive de  $f$

$$\forall y \in J, f(g(y)) \times g'(y) = F'(g(y))g'(y) = (F \circ g)'(y)$$

$$\text{Donc } \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(y)) \times g'(y) dy = [(F \circ g)(y)]_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} = F(g(g^{-1}(b))) - F(g(g^{-1}(a))) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$$

Méthode : On donne  $x = g(y)$ , où  $g$  est bijective (ou  $y = g^{-1}(x)$ )

\_ on détermine  $y = g^{-1}(x)$  (ou  $x = g(y)$ )

et on remplace dans l'expression  $x$  par  $g(y)$

\_ Notation :  $x = g(y)$  on dérive par rapport à  $y$  :  $\frac{dx}{dy} = g'(y)$  d'où la notation :  $dx = g'(y)dy$

\_ on modifie les bornes : pour  $x = a$   $y = g^{-1}(a)$  pour  $x = b$   $y = g^{-1}(b)$

$$\text{Exemple : Calcul de } I = \int_0^1 \frac{x+1}{2x+3} dx = \int_{x=0}^{x=1} \frac{x+1}{2x+3} dx$$

$$\text{On pose } y = 2x + 3 \Leftrightarrow x = \frac{y-3}{2} \quad dx = \frac{dy}{2}. \quad \text{quand } x = 0 \quad y = 3 \quad \text{quand } x = 1 \quad y = 5$$

$$\begin{aligned} I &= \int_{y=3}^{y=5} \frac{\frac{y-3}{2} + 1}{y} \frac{dy}{2} = \int_3^5 \frac{y-1}{4y} dy = \int_3^5 \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{4y} \right) dy = \left[ \frac{y}{4} - \frac{\ln(y)}{4} \right]_3^5 = \frac{5}{4} - \frac{\ln(5)}{4} - \frac{3}{4} + \frac{\ln(3)}{4} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \ln\left(\frac{3}{5}\right) \end{aligned}$$

Propriété : Soit  $f$  une fonction continue sur l'intervalle  $[-a;a]$ .

Si  $f$  est paire sur  $[-a;a]$ , alors  $\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$

Si  $f$  est impaire sur  $[-a;a]$ , alors  $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$

Démonstration :  $\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx$  (relation de Chasles)

Changement de variables dans la première intégrale : on pose  $u = -x$  donc  $x = -u$   $dx = -du$

$$\int_{-a}^0 f(x)dx = \int_a^0 f(-u)(-du) = \int_0^a f(-u)du$$

Si  $f$  est paire,  $\int_0^a f(-u)du = \int_0^a f(u)du$  donc  $\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(t)dt$

Si  $f$  est impaire,  $\int_0^a f(-u)du = \int_0^a -f(u)du = - \int_0^a f(u)du$  donc  $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$

## 4. Fonction définie par une intégrale

Propriété : Soit  $g$  une fonction continue sur un intervalle  $I$  et  $a \in I$ .

Soit  $f$  la fonction définie par sur  $I$  par  $f(x) = \int_a^x g(t)dt$ .

Alors  $f$  est une primitive de  $g$  sur  $I$ .

Démonstration :

si  $G$  est une primitive de  $g$  sur  $I$ ,  $f(x) = \int_a^x g(t)dt = [G(t)]_a^x = G(x) - G(a)$ .

Donc  $f'(x) = G'(x) = g(x)$  (car  $G$  primitive de  $g$ ).

Cas général : Soit  $g$  une fonction continue sur un intervalle  $J$  et  $u, v$  deux fonctions dérivables

d'un intervalle  $I$  sur  $J$ . On pose :  $\forall x \in I, f(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} g(t)dt$ .

Alors  $f$  est dérivable sur  $I$  et  $\forall x \in I, f'(x) = v'(x)g(v(x)) - u'(x)g(u(x))$ .

Démonstration :

Si  $G$  est une primitive de  $g$  sur  $J$ ,  $f(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} g(t)dt = [G(t)]_{u(x)}^{v(x)} = G(v(x)) - G(u(x))$ .

Donc  $f'(x) = v'(x)G'(v(x)) - u'(x)G'(u(x)) = v'(x)g(v(x)) - u'(x)g(u(x))$ .

Exemple : Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = \int_{2x}^{3x} \frac{e^t}{t} dt$

Soit  $g(t) = \frac{e^t}{t}$  et  $G$  une primitive de  $g$ . Alors  $f(x) = [G(t)]_{2x}^{3x} = G(3x) - G(2x)$

Donc  $f'(x) = 3G'(3x) - 2G'(2x) = 3\frac{e^{3x}}{3x} - \frac{2e^{2x}}{2x} = \frac{e^{3x} - e^{2x}}{x}$ .