Chapitre 22 : Couples de variables aléatoires discrètes

1. Loi d'un couple de V.A.R. discrètes

1.1 Loi conjointe / Lois conditionnelles

Définition :
Soient X et Y deux V.A.R.D. telles que $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j, j \in J\}$.
On appelle loi (ou loi conjointe) du couple (X,Y) (ou loi conjointe) l'ensemble des $P((X = x_i) \cap (Y = y_j)_j$ où $i \in I, j \in J$.

Remarques :
_ On note parfois $p_{i,j} = P(X = x_i) \cap (Y = y_j))$.
_ On a toujours $\sum_{i \in I, j \in J} P((X = x_i) \cap (Y = y_j) = \sum_{i \in I, j \in J} p_{i,j} = 1$.
_ si I et J sont petits, on peut représenter la loi conjointe dans un tableau à double entrée.

Définition :
Pour $i \in I$, on appelle loi de Y conditionnée par $X = x_i$ (ou sachant X), l'ensemble des valeurs $P_{(X = xi)}(Y = y_j)$, où $i \in I$ et $j \in J$.

Propriété : Lien loi conditionnelle/ loi conjointe
$\forall i \in I, \forall j \in J, P((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = P(X = x_i)P_{(X = xi)}(Y = y_j)$

Remarque :
Pour déterminer la loi conjointe du couple (X, Y) :
_ soit on exprime l'événement $(X= x_i) \cap (Y = y_j)$ en fonction d'événements élémentaires
_ soit on utilise la probabilité conditionnelle.
_ soit on utilise l'indépendance de X et Y (si elles sont indépendantes) : voir paragraphe 1.3

Exemples :
1) Une urne contient 3 boules numérotées de 1 à 3. On tire deux boules, l'une après l'autre et avec remise. Soit X le numéro de la première boule et Y la somme des numéros des deux boules.
$X(\Omega) = \{1,2,3\}$ $Y(\Omega) = \{2,3,4,5,6\}$
Loi conjointe :

X \ Y	2	3	4	5	6
1	1/9	1/9	1/9	0	0
2	0	1/9	1/9	1/9	0
3	0	0	1/9	1/9	1/9

2) Une pièce a une probabilité de faire pile de $\frac{1}{3}$.
On lance cette pièce jusqu'à obtenir un deuxième pile.
Soit X le nombre de lancers nécessaires pour obtenir le premier pile.
Soit Y le nombre de lancers nécessaires (en tout) pour obtenir le deuxième pile.
$X(\Omega) = \{1, 2, \dots\}$ $Y(\Omega) = \{2, 3, \dots.\}$
$\forall j > i$, $(X = i) \cap (Y = j)$ = "On obtient le premier pile au i-ème tirage et le deuxième au j-ème" $= F_1 \cap \dots \cap F_{i-1} \cap P_i \cap F_{i+1} \cap \dots \cap F_{j-1} \cap F_j$

Donc $P((X = i) \cap (Y = j)) = \left(\frac{2}{3}\right)^{i-1}\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{j - i + 1}\frac{1}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{j-2}\frac{1}{9}$

$\forall j \leq i$, $P((X = i) \cap (Y = j)) = 0$

3) On lance 10 fois une pièce équilibrée. Soit X le nombre de piles effectués.
Puis on choisit au hasard un nombre entre 0 et X, qu'on note Y.
a) Quel est la loi de X ?
b) Pour tout $j \leq i$, déterminer $P_{(X = i)}(Y = j)$
c) Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y).

a) Il y a 10 lancers indépendants. La probabilité de faire pile est 1/2 et X est le nombre de piles effectués. Donc $X \longrightarrow B(10, 1/2)$.

Donc $\forall i \in \{0, .., 10\}$, $P(X = i) = \binom{10}{i}\frac{1}{2^{10-i}}\frac{1}{2^i} = \binom{10}{i}\frac{1}{2^{10}}$

b) Sachant (X = i), Y suit la loi uniforme sur {0, …, i}. Donc $P_{(X = i)}(Y = j) = \frac{1}{i+1}$ si $j \leq i$

c) Donc $P((X = i) \cap (Y = j) = P(X = i)\, P_{(X = i)}(Y = j) = \begin{cases} \binom{10}{i}\frac{1}{2^{10}}\frac{1}{i+1} \text{ si } j \leq i \\ 0 \text{ si } j > i \end{cases}$

1.2 Lois marginales

Définition :
Si (X,Y) est un couple de V.A.R., les lois des V.A.R. X et Y sont appelées lois marginales.

Remarques :
_ Chercher les lois marginales, c'est donc chercher $P(X = x_i)$ pour $i \in I$ et $P(Y = y_j)$ pour $j \in J$.
_ On note souvent $p_{i,.} = P(X = x_i)$ $p_{.,j} = P(Y = x_j)$.
_ quand la loi conjointe est présentée dans un tableau, les lois marginales s'écrivent dans les marges !

Propriété : Lien loi conjointe ou conditionnelle / loi marginale (Formule des probabilités totales)

$$\forall i \in I,\ P(X = x_i) = \sum_{j \in J} P((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = \sum_{j \in J} P(Y = y_j)\, P_{(Y = yj)}(X = x_i)$$

$$\forall j \in J,\ P(Y = y_j) = \sum_{i \in I} P((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = \sum_{i \in I} P(X = x_i) P_{(X = xi)}(Y = y_j).$$

.

Autrement dit, $\forall i \in I,\ p_{i,.} = \sum_{j \in J} p_{i,j}$ $\forall j \in J,\ p_{.,j} = \sum_{i \in I} p_{i,j}$

Exemples (suite des exemples précédents) : 1)

X = x\ Y	2	3	4	5	6	$p_{i,.}$
1	1/9	1/9	1/9	0	0	1/3
2	0	1/9	1/9	1/9	0	1/3
3	0	0	1/9	1/9	1/9	1/3
$p_{.,j}$	1/9	2/9	3/9	2/9	1/9	1

2) Loi marginale de X : on voit que $X \longrightarrow G(1/3)$.

Loi marginale de Y : ($j > i \Leftrightarrow i < j$)

$\forall\, j \geq 2$,

$$P(Y = j) = \sum_{i=1}^{+\infty} P((X = i) \cap (Y = j)) = \sum_{i=1}^{j-1} P((X = i) \cap (Y = j)) + \sum_{i=j}^{+\infty} P((X = i) \cap (Y = j))$$

$$= \sum_{i=1}^{j-1} \left(\frac{2}{3}\right)^{j-2} \frac{1}{9} + 0 = (j-1)\left(\frac{2}{3}\right)^{j-2} \frac{1}{9}$$

1.3 Variables aléatoires indépendantes

Définition : Si $\forall\, i \in I$ et $\forall\, j \in J$, $P((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = P(X = x_i) \times P(Y = y_j)$, on dit que X et Y sont des variables aléatoires indépendantes.

Remarque : autrement dit, X et Y sont indépendantes si et seulement si les événements $(X = x_i)$ et $(Y = y_j)$ sont indépendants $\forall i \in I$, $\forall\, j \in J$.

Exemple : $P((X = 2) \cap (Y = 2)) = 0$ $\quad P(X = 2)P(Y = 2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{27}$. X et Y ne sont pas indépendantes.

Conclusion

Loi conjointe $\xrightarrow{P_A(B) = P(A \cap B)/P(B)}$ **Lois conditionnelles**

$P((X = x_i) \cap (Y = y_j))$ $\xleftarrow[P(A \cap B) = P(A)P_A(B)]{}$ $P_{(X=xi)}(Y = y_j)$ $\quad P_{(Y = yj)}(X=x_i)$

FPT

$P(X=x_i)=\sum_j P((X=x_i)\cap(Y=y_j))$

$P(Y=y_j)=\sum_i P((X=x_i)\cap(Y=y_j))$

si X, Y indep

$P((X=x_i)\cap(Y=y_j)) =$

$P(X = x_i)P(Y = y_j)$

FPT

$P(X=x_i) = \sum_j P(Y = y_j)P_{(Y=yj)}(X=xi)$

$P(Y = y_j) = \sum_i P(X=x_i)P_{(X=xi)}(Y=y_j)$

Lois marginales

$P(X = x_i)$ $\; P(Y = y_j)$

2. Exemples d'utilisation d'un couple de V.A.R.D.

Dans toute cette partie, on considère des V.A.R.D. à valeurs dans $\mathbb{N}$.

2.1 P(X = Y)

Introduction Soient X et Y deux VARD telles que $X(\Omega) = \{1,2,3\}$ et $Y(\Omega) = \{1,2,3\}$
$P(X = Y)$?
$(X = Y) = ((X = 1)\cap(Y = 1)) \cup ((X = 2)\cap(Y = 2)) \cup (X = 3)\cap(Y = 3))$
$\quad = \cup_{i=1}^{3}((X = k) \cap (Y = k)$

Donc $P(X = Y) = \sum_{k=1}^{3} P((X = k) \cap(Y = k))$

Propriété :
Soit X et Y deux variables aléatoires telles que $X(\Omega) = Y(\Omega) = \{i \in I\}$.
Alors $(X = Y) = \cup_{i \in I} ((X = i) \cap (Y = i))$ et

$$P(X = Y) = \sum_{i \in I} P((X = i) \cap (Y = i))$$

Exemple :
Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes les deux la loi géométrique de paramètre p. $P(X = Y)$?
$X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$

$$P(X = Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} P((X = k)\cap(Y = k)) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X= k)(Y = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} q^{k-1}pq^{k-1}p$$

$$= p^2 \sum_{k=1}^{+\infty} (q^2)^{k-1} = p^2 \sum_{k'=0}^{+\infty} (q^2)^{k'} = p^2 \times \frac{1}{1 - q^2} = \frac{p^2}{1 - (1 - p)^2} = \frac{p^2}{2p - p^2} = \frac{p}{2 - p}$$

Remarque :

$$P(X < Y) = \sum_{i \in I, j \in J, i < j} P((X = i) \cap (Y = j)) = \sum_{i \in I} P((X = i) \cap (Y > i))$$

2.2 Loi de max(X,Y)

Généralité
Soient X et Y deux V.A.R.D. telles que $X(\Omega) = Y(\Omega) \subset \mathbb{N}$. On pose $Z = \max(X,Y)$
Alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $(Z \leq k)$ signifie que $(X \leq k)$ et $(Y \leq k)$.
Donc $P(Z \leq k) = P((X \leq k) \cap (Y \leq k))$.

Exemple :
Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes les deux la loi géométrique de paramètre p. On pose $Z = \max(X,Y)$.
Déterminer $P(Z \leq k)$ (pour $k \geq 2$) puis la loi de Z
loi de Z ?
$Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$

$\forall k \geq 1$, $P(Z \leq k) = P((X \leq k) \cap (Y \leq k)) = P(X \leq k)P(Y \leq k)$

Or $P(X \leq k) = 1 - P(X > k) = 1 - q^k$ (les k premiers sont des échecs)
De même $P(Y \leq k) = 1 - q^k$
Donc $P(Z \leq k) = (1 - q^k)^2$
$P(Z = k) = P(Z \leq k) - P(Z \leq k - 1) = (1 - q^k)^2 - (1 - q^{k-1})^2$

Remarque : On obtient des résultats analogues pour le minimum de plusieurs variables aléatoires en utilisant $P(Z \geq k)$.

2.3 Loi de X + Y

Introduction Soient X et Y deux VARD telles que $X(\Omega) = \{1,2,3\}$ et $Y(\Omega) = \{1,2,3\}$
On pose $Z = X + Y$. Loi de Z ?
$Z(\Omega) = \{2,3,4,5,6\}$
$(Z = 2) = (X = 1)\cap(Y = 1)$ $(Z = 3) = ((X = 1)\cap(Y = 2))\cup(X = 2)\cup(Y = 1))$
$(Z = 4) = ((X = 1)\cap(Y = 3)) \cup ((X = 2)\cap(Y = 2)) \cup ((X = 3)\cup(Y = 1)) \dots$
De manière générale
$(Z = k) = ((X = 1)\cap(Y = k - 1)) \cup(X = 2) \cap (Y = k - 2)) \cup \dots \cup ((X = k - 1)\cap(Y = 1))$
$= \cup_{i=1}^{k-1} ((X = i) \cap (Y = k - i))$

Propriété :
Soient X et Y deux V.A.R. avec $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ et $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

Alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(X + Y = k) = \sum_{i \text{ app } X(\Omega) \text{ tel que } k - i \in Y(\Omega)} ((X = i)) \cap (Y = k - i)$

Exemple :
Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes les deux la loi géométrique de paramètre p. On pose $Z = X + Y$. loi de Z ?
$Z(\Omega) = (2, 3, \dots\}$
$\forall k \geq 2$, $(Z = k) = \cup_{i=1}^{k-1} ((X = i) \cap (Y = k - i))$ donc

$$P(Z = k) = \sum_{i=1}^{k-1} P((X = i))\cap(Y = k - i))$$

$$= \sum_{i=1}^{k-1} P(X = i)P(Y = k - i) = \sum_{i=1}^{k-1} q^{i-1}pq^{k-i-1}p = \sum_{i=1}^{k-1} p^2q^{k-2} = (k - 1)p^2q^{k-2}$$

Rappel : Si X et Y admettent des espérances E(X) et E(Y), alors $Z = X + Y$ admet une espérance et $E(Z) = E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.

Remarque : Il faut écrire une décomposition similaire pour la loi de $X - Y$.