

Chapitre 20 : Espaces probabilisés infinis

Introduction :

On lance une pièce jusqu'à ce qu'on obtienne pile, et on note X le numéro de ce lancer

$$X(\Omega) = \{1, 2, \dots\} = \mathbb{N}^*$$

Il y a un nombre infini de possibilités.

Remarque générale : Cas classique

On répète une même épreuve jusqu'à obtenir un succès. On s'arrête au premier succès.

Alors, si $k \geq 1$, on s'arrête au k -ème essai si et seulement si les $k-1$ premiers essais sont des échecs et le k -ème essai est un succès.

1 Définition d'une tribu

Définition :

Soit Ω un ensemble.

On appelle tribu de parties de Ω tout sous-ensemble $\mathcal{T}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ tel que :

- 1) $\Omega \in \mathcal{T}$
- 2) $\forall A \in \mathcal{T}, \overline{A} \in \mathcal{T}$. (stabilité par passage au complémentaire)
- 3) Si I est une partie de $\mathbb{N}$, et si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille d'éléments de $\mathcal{T}$ alors $\cup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$. (stabilité par union dénombrable)

Remarques :

- _ $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu de parties de Ω . C'est presque toujours la tribu qu'on étudie.
- _ Les éléments d'une tribu sont appelés des événements
- _ On peut montrer que une intersection dénombrable d'événements est un événement

2. Probabilité sur une tribu

(Oral) Rappel : Si Ω est un ensemble fini, on appelle probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ toute application P de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

- 1) $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), 0 \leq P(A) \leq 1$
- 2) $P(\Omega) = 1$
- 3) Si A et B sont deux événements incompatibles, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Définition : Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisable.

On appelle probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$ toute application P de $\mathcal{T}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

- 1) $\forall A \in \mathcal{T}, 0 \leq P(A) \leq 1$
- 2) $P(\Omega) = 1$
- 3) Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille d'éléments de $\mathcal{T}$ deux à deux incompatibles, alors :

$$\sum P(A_n) \text{ converge et } P(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$$

Dans ce cas le triplet $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ est appelé espace probabilisé.

Exemple : On lance un dé équilibré et on s'arrête quand on fait un 5 ou un 6.

On note le nombre de lancers. Les lancers sont indépendants.

$\Omega = \{1, 2, \dots\} = \mathbb{N}^*$. Soit $A_k =$ "on a lancé k fois le dé pour faire 5 ou 6"

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, P(A_k) = \frac{4}{6} \times \dots \times \frac{4}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{2}{3} \times \dots \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \frac{1}{3}$$

Soit $B = \text{"On a lancé le dé un nombre pair de fois"}$.

$$B = A_2 \cup A_4 \cup A_6 \dots \quad B = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} A_{2k}$$

Les événements (A_{2k}) sont incompatibles, donc

$$P(B) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(A_{2k}) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{2k-1} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{2k} = \frac{1}{2} \times \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^k = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - \frac{4}{9}} - 1 \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{9}{5} - 1 \right) = \frac{2}{5}$$

Définition : Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé.

Soit $A \in \mathcal{T}$.

Si $P(A) = 0$ on dit que A est un ensemble négligeable.

Si $P(A) = 1$ on dit que A est presque sur.

Exemple : Suite de l'exemple précédent.

Soit $A = \text{"Le jeu se termine"}$ $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ (éléments disjoints)

$$\text{Donc } P(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \frac{1}{3} = (n' = n-1) \frac{1}{3} \sum_{n'=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n'} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 1$$

Le jeu se termine presque sûrement.

3 Propriétés d'une probabilité

Les formules valables pour une probabilité sur un ensemble fini restent valables pour un ensemble quelconque :

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) \text{ et donc } P(\emptyset) = 0$$

$$\text{Si } A \subset B, P(A) \leq P(B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \text{ et de manière générale, la formule du crible}$$

$$\text{Si } A_1, \dots, A_n \text{ sont } n \text{ événements incompatibles, } P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

Propriété de la limite monotone :

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé.

1) Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'événements (c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset A_{n+1}$), alors la suite $P(A_n)$ converge et $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n)$.

2) Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'événements (c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N}, A_{n+1} \subset A_n$) alors la suite $P(A_n)$ converge et $P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n)$.

Exemple : Suite de l'exemple précédent.

Pour tout $n \geq 1$, soit $C_n = \text{"le jeu continue après } n \text{ lancers"}$

Soit $C = \text{"le jeu ne s'arrête jamais"}$

$$C_n = \overline{S_1} \cap \dots \cap \overline{S_n} \quad P(C_n) = \frac{2}{3} \times \dots \times \frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$C = C_1 \cap C_2 \cap \dots = \bigcap_{n=1}^{+\infty} C_n$$

De plus $C_{n+1} \subset C_n$ la suite (C_n) est décroissante (au sens de l'inclusion).

Donc $p(C) = \lim_{n \rightarrow +\infty} p(C_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ donc $p(C) = 0$. C est négligeable.

Le jeu se termine presque sûrement.

Remarque : Probabilité d'une union infinie $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$:

_ si les (A_n) sont incompatibles : $P(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$

_ si les (A_n) sont inclus les uns dans les autres ($A_n \subset A_{n+1}$) $P(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n)$

Propriété : Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite quelconque d'événements.

Alors la suite $P(\bigcup_{k=1}^n A_k)$ converge vers $P(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k)$

la suite $P(\bigcap_{k=1}^n A_k)$ converge vers $P(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k)$

4 Probabilités conditionnelles

La définition d'une probabilité conditionnelle et la formule des probabilités composées restent vraies.

On peut généraliser la notion de système complet d'événements :

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé. Soit $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une famille d'événements tels que :

1) $\forall i \in \mathbb{N}, P(A_i) \neq 0$

2) $\forall i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$

3) $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \Omega$ Alors on dit que $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements.

Propriété : Formule des probabilités totales

Soit $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ un système complet d'événements

Alors $\forall B \in \mathcal{T}$, les séries $\sum P(A_i)P_{A_i}(B)$ et $\sum P(A_i \cap B)$ convergent

$$\text{et } P(B) = \sum_{i=0}^{+\infty} P(A_i)P_{A_i}(B) = \sum_{i=0}^{+\infty} P(A_i \cap B)$$