

## Chapitre 18 : Espaces vectoriels

### 1. Notion d'espace vectoriel

On sait additionner deux réels, deux éléments de  $\mathbb{R}^n$  deux matrices, deux polynômes, deux fonctions, deux suites, ...

De la même manière, on sait multiplier un réel par un réel, un élément de  $\mathbb{R}^n$  une matrice par un réel, un polynôme par un réel, une fonction par un réel, ...

On va donner un cadre théorique général à ces cas particuliers.

Définition (intuitive) :

Soit E un ensemble.

Si on a défini dans E une addition et la multiplication par un nombre réel, on dit que E est un espace vectoriel.

Dans ce cas, les éléments de E sont appelés des vecteurs et les éléments de  $\mathbb{R}$  des scalaires.

Exemples :

\_  $M_{n,1}(\mathbb{R})$  est un espace vectoriel :

si  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ ,  $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on a défini  $X + Y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \dots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$  et  $\lambda X = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \dots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$ .

On peut identifier  $\mathbb{R}^n$  et  $M_{n,1}(\mathbb{R})$ . On utilisera donc les notations  $(x_1, \dots, x_n)$  ou  $\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$

\_  $M_{n,p}(\mathbb{R})$  : si  $A, B \in M_{n,p}(\mathbb{R})$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on a défini  $A + B$  et  $\lambda A$ .

\_  $\mathbb{R}[X]$  (ensemble des polynômes) et  $\mathbb{R}_n[X]$  (ensemble des polynômes de degré  $\leq n$ ) sont des espaces vectoriels :

si  $P = a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0$ ,  $Q = b_n X^n + \dots + b_1 X + b_0$  sont des polynômes, et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on a défini  $P + Q = (a_n + b_n)X^n + \dots + (a_1 + b_1)X + (a_0 + b_0)$

et  $\lambda P = (\lambda a_n)X^n + \dots + (\lambda a_1)X + \lambda a_0$ .  $\mathbb{R}[X]$  est un espace vectoriel.

\_ l'ensemble des suites, l'ensemble des fonctions définies sur  $\mathbb{R}$ , l'ensemble des variables aléatoires sur un univers  $\Omega$  etc... sont des espaces vectoriels

### 2. Les sous-espaces vectoriels

#### 2.1 Définition d'un sous-espace vectoriel

Définition :

Soit E un espace vectoriel et F une partie de E.

Alors F est un sous-espace vectoriel de E si :

(SE1) :  $0 \in F$  (ou  $F \neq \emptyset$ )

(SE2) :  $\forall X \in F, \forall X' \in F, X + X' \in F$  (F est stable par addition)

(SE3) :  $\forall X \in F, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda X \in F$  (F est stable par multiplication par un scalaire)

Remarques : \_ (SE2) et (SE3) sont équivalentes à :  $\forall X \in F, \forall X' \in F, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda X + X' \in F$

\_ Un sous-ensemble est en général défini comme l'ensemble des éléments qui vérifient une certaine propriété. Il faut donc vérifier que si deux éléments vérifient la propriété, leur somme aussi, et le produit par un réel aussi.

Exemples :

1) 1) Soit  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - 3z = 0\}$ .  $F \subset \mathbb{R}^3$

\_  $0 + 2 \times 0 - 3 \times 0 = 0$  donc  $(0,0,0) \in F$ .

\_ si  $X = (x, y, z) \in F$  et si  $X' = (x', y', z') \in F$ ,  $x + 2y - 3z = 0$  et  $x' + 2y' - 3z' = 0$

Alors  $X + X' = (x + x', y + y', z + z')$

et  $x + x' + 2(y + y') - 3(z + z') = x + 2y + x' + 2y' - 3z - 3z' = 0 + 0 = 0$ .

Donc  $X + X' \in F$ .

\_ Si  $X = (x, y, z) \in F$  et si  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda X = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$

$(\lambda x) + 2(\lambda y) - 3(\lambda z) = \lambda(x + 2y - 3z) = \lambda \times 0 = 0$  donc  $\lambda X \in F$ .

Donc  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ .

2) Soit  $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 2x - y + 3 = 0\}$   $F \subset \mathbb{R}^2$ .

mais  $2 \times 0 - 0 + 3 \neq 0$  donc  $0 \notin F$ .  $F$  n'est pas un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^2$ .

3) Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

Soit  $\mathcal{F} = \{M \in M_2(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$ .  $\mathcal{F}$  sev de  $M_n(\mathbb{R})$  ?

\_  $A \times O = O$   $O \times A = O$  donc  $A \times O = O \times A$  donc  $O \in \mathcal{F}$

\_ soient  $M \in \mathcal{F}$  et  $M' \in \mathcal{F}$  : donc  $AM = MA$  et  $AM' = M'A$

$M + M' \in \mathcal{F}$  ?  $A(M + M') = AM + AM' = MA + M'A = (M + M')A$  donc  $M + M' \in \mathcal{F}$ .

\_ soit  $M \in \mathcal{F}$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$  :  $AM = MA$   $\lambda M \in \mathcal{F}$  ?

$A(\lambda M) = \lambda(AM) = \lambda(MA) = (\lambda M)A$  donc  $\lambda M \in \mathcal{F}$ .

Donc  $\mathcal{F}$  est un sous-espace vectoriel de  $M_2(\mathbb{R})$

Remarque (Oral) : L'ensemble des fonctions continues, l'ensemble des fonctions dérivables, etc... sont des sous-espaces vectoriels de l'ensemble des fonctions.

Propriété : Soit (S) un système linéaire homogène : 
$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,p}x_p = 0 \\ \dots \\ a_{n,1}x_1 + \dots + a_{n,p}x_p = 0 \end{cases}$$

Alors l'ensemble des solutions du système forme un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^p$ .

Remarque : Ex 1 :  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - 3z = 0\}$ .

$F$  est l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène, donc c'est un SEV de  $\mathbb{R}^3$ .

## 2.2 Sous-espace vectoriel engendré

Définition :

Soit  $E$  un espace vectoriel et  $X_1, X_2, \dots, X_p$  une famille de vecteurs de  $E$ .

Soit  $Y \in E$ . On dit que  $Y$  est combinaison linéaire de  $X_1, \dots, X_p$  s'il existe des nombres réels  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  tels que  $Y = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \dots + \lambda_p X_p$ .

$$\text{Exemple : } X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} -1 \\ -12 \\ 12 \end{pmatrix}$$

La matrice  $Y$  est-elle combinaison linéaire de  $X_1$  et  $X_2$  ?

$$Y = aX_1 + bX_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b = -1 \\ -2a + 3b = -12 \\ 4a = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2 \\ b = -2 \\ a = 3 \end{cases}$$

Donc  $Y = 3X_1 - 2X_2$

Définition - Propriété

Soit  $(X_1, \dots, X_p)$  une famille de vecteurs de  $E$ .

L'ensemble des combinaisons linéaires de  $(X_1, \dots, X_p)$  est noté  $\text{Vect}(X_1, \dots, X_p)$ . (ou  $\langle X_1, \dots, X_p \rangle$ )

C'est un sous-espace vectoriel de  $E$ , appelé sous-espace vectoriel engendré par la famille  $(X_i)_{i \in \{1, \dots, p\}}$ .

$$\{\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_p X_p \text{ avec } \lambda_1 \in \mathbb{R}, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(X_1, \dots, X_p)$$

Si  $\mathcal{F} = \text{Vect}(V_1, \dots, V_p)$ , on dit que  $V_1, \dots, V_p$  est une famille génératrice de  $\mathcal{F}$ .

Exemples :

\_ Soit  $\mathcal{F} = \{(2z, -3z, z), z \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$ . Trouver une famille génératrice de  $\mathcal{F}$ .

$$= \{z(2, -3, 1), z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((2, -3, 1)).$$

\_ Soit  $\mathcal{G} = \left\{ \begin{pmatrix} 3a + 2b & a - b \\ 2a & -3b \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \right\} \subset M_2(\mathbb{R})$ .

Trouver une famille génératrice de  $\mathcal{G}$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= \left\{ \begin{pmatrix} 3a & a \\ 2a & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2b & -b \\ 0 & -3b \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ a \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

Remarques :

\_ Dans une famille génératrice, on peut remplacer un vecteur par un de ses multiples (non nul)

$$\text{Exemple : } \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \right) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

\_ Si  $\mathcal{F} = \text{Vect}(V_1, \dots, V_p)$  et si  $V_p$  est combinaison linéaire de  $V_1, \dots, V_{p-1}$ , alors  $\mathcal{F} = \text{Vect}(V_1, \dots, V_{p-1})$ .

$$\text{Exemple : } \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, 3 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

### 3. Base d'un espace vectoriel

#### 3.1 Famille libre

Définition :

\_ On dit que  $(X_i)$  est une famille libre si

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p, \lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_p X_p = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0.$$

(si une combinaison linéaire est nulle, tous les coefficients sont nuls)

Remarques :

\_ Attention au sens de la définition : l'autre sens est évident ! (si  $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$  alors  $\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_p X_p = 0$ )

\_ Une famille est libre s'il n'existe aucune relation (sauf  $0 = 0$ ) entre les vecteurs.

\_ Si une famille est libre, on dit que les vecteurs sont indépendants, sinon, on dit qu'ils sont liés.

Exemple : dans  $\mathbb{R}^2$

$$\_ U = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } V = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Si } \lambda U + \mu V = 0 : \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + 2\mu = 0 \\ 2\lambda - 3\mu = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + 2\mu = 0 \\ -7\mu = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = 0 \end{cases}$$

U et V forment une famille libre.

$$\_ W = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } X = \begin{pmatrix} 5 \\ -15/2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Si } \lambda W + \mu X = 0 \begin{cases} -2\lambda + 5\mu = 0 \\ 3\lambda - \frac{15}{2}\mu = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\lambda + 5\mu = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2\lambda + 5\mu = 0$$

Il y a une infinité de solutions. La famille n'est pas libre.

Propriété :

\_ Une famille composée d'un seul vecteur forme une famille libre si et seulement si le vecteur est non nul.

\_ Une famille composée de deux vecteurs est libre si et seulement si les deux vecteurs ne sont pas colinéaires (SEULEMENT AVEC 2 !!)

Ex : Pour les exemples précédents : U et V ne sont pas colinéaires, donc (U, V) est une famille libre.

W et X sont colinéaires ( $X = -\frac{5}{2}W$ ) : ils ne forment pas une famille libre.

#### 3.2 Base d'un espace vectoriel

Définition

Soit  $(X_1, \dots, X_p)$  une famille de vecteurs de l'espace vectoriel E.

On dit que  $(X_1, \dots, X_p)$  est une base de E si  $(X_1, \dots, X_p)$  est une famille libre et génératrice.

La définition est identique pour la base d'un sous-espace vectoriel.

Exemple

Soit  $F = \left\{ \begin{pmatrix} 3a + 2b \\ a - b \\ 2a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \right\}$  Base de  $F$  ?

On a  $F = \left\{ a \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ . Donc  $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$  forment

une famille génératrice de  $F$ .

Comme ils ne sont pas colinéaires, ils forment une famille libre de  $F$ , donc une base de  $F$ .

Propriété - Définition :

Soit  $(X_1, \dots, X_p)$  une base de  $E$ .

Alors tout élément  $Y \in E$  s'écrit de façon unique  $Y = \lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_p X_p$ , avec  $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ .

$(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$  sont appelées les coordonnées de  $Y$  dans la base  $(X_1, \dots, X_n)$ .

Exemple : Admettons que  $V = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$  et  $W = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$  forment une base de  $\mathbb{R}^2$ .

Soit  $X = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ . Coordonnées de  $X$  dans la base  $(V, W)$  ?

$$X = aV + bW \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - b = 3 \\ 2a = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = 2 \end{cases}$$

Donc  $X$  a pour coordonnées  $(2;1)$  dans la base  $(V, W)$ .

### 3.3 Bases canoniques

Définition – Propriété (Base canonique de  $\mathbb{R}^n$ ) :

Dans  $\mathbb{R}^n$  : pour  $i \in \{1, \dots, n\}$ , on note  $E_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  (1 à la  $i$ -ème place).

Alors la famille  $(E_1, \dots, E_n)$  est une base de  $\mathbb{R}^n$ , appelée base canonique.

Si  $X = (x_1, \dots, x_n)$ , alors  $(x_1, \dots, x_n)$  sont les coordonnées de  $X$  dans la base canonique.

Exemple : Dans  $\mathbb{R}^3$

$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

Si  $X = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $X$  a pour coordonnées  $(4, -1, 2)$  dans la base  $(E_1, E_2, E_3)$ .

Définition – Propriété

Dans  $\mathbb{R}_n[X]$   $e_0 = 1, e_1 = X, \dots, e_n = X^n$  forment une base, appelée base canonique.

Si  $P = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$ ,  $P$  a pour coordonnées  $(a_0, a_1, \dots, a_n)$  dans la base canonique.

Ex :  $(1, X, X^2)$  est la base canonique de  $\mathbb{R}_2[X]$

Si  $P = 3X^2 - 2X + 1$  les coordonnées de  $P$  dans la base canonique sont :  $(1; -2; 3)$ .

Définition - Propriété

Dans  $M_{n,p}(\mathbb{R})$  si on note  $E_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \dots & 1 & \dots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$  pour  $i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, p\}$ .

La famille  $(E_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$  est une base de  $M_{n,p}(\mathbb{R})$ , appelée base canonique.

Ex : Base canonique de  $M_2(\mathbb{R})$

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

### 3.4 Notion de dimension

Propriété – Définition Dans un espace vectoriel  $E$ , toutes les bases de  $E$  ont le même cardinal. Ce cardinal est appelé dimension de l'espace vectoriel.

Propriété :

D'après les bases canoniques vues dans le paragraphe précédent :

$\mathbb{R}^n$  est de dimension  $n$ .  $M_{n,1}(\mathbb{R})$  aussi,  $M_{n,p}(\mathbb{R})$  est de dimension  $n \times p$ .

$\mathbb{R}_n[X]$  est de dimension  $n + 1$ .

Attention au vocabulaire : cardinal de la base = dimension de l'E.V.

Propriété : Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$ .

Alors toute famille libre de  $n$  vecteurs est une base de  $E$ .

Ex :

Soit  $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $W = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ .  $(U, V, W)$  base de  $\mathbb{R}^3$  ?

$\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ . Donc il suffit de montrer que  $(U, V, W)$  forment une famille libre.

$$aU + bV + cW = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ 2a = 0 \\ 3a + b + 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = 0 \\ c = 0 \end{cases} \text{ Donc } (U, V, W) \text{ forment une base de } \mathbb{R}^3.$$

## 4. Applications linéaires

### 4.1 Définition

Définition :

Soient E et F deux espaces vectoriels. Soit f une application de E vers F.

On dit que f est une application linéaire si :

$$(LIN1) \forall X, X' \in E^2, f(X + X') = f(X) + f(X')$$

$$(LIN2) \forall X \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, f(\lambda X) = \lambda f(X).$$

Remarque :

(LIN1) et (LIN2) peuvent être remplacés par :

$$\forall X \in E, \forall X' \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, f(\lambda X + X') = \lambda f(X) + f(X')$$

Vocabulaire :

\_ une application linéaire de E dans E est appelée un endomorphisme.

\_ une application linéaire de E dans  $\mathbb{R}$  est appelée une forme linéaire.

Exemples :

$$1) \text{ Soit } f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x - y + z \\ x - 2z \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$(LIN1) \text{ Si } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad X + X' = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix}$$

$$f(X + X') = \begin{pmatrix} 2(x + x') - (y + y') + (z + z') \\ x + x' - 2(z + z') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y + z + 2x' - y' + z' \\ x - 2z + x' - 2z' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2x - y + z \\ x - 2z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x' - y' + z' \\ x' - 2z' \end{pmatrix} = f(X) + f(X').$$

$$(LIN2) \text{ si } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } \lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda X = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}$$

$$f(\lambda X) = \begin{pmatrix} 2(\lambda x) - (\lambda y) + (\lambda z) \\ (\lambda x) - 2(\lambda z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(2x - y + z) \\ \lambda(x - 2z) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x - y + z \\ x - 2z \end{pmatrix} = \lambda f(X).$$

Donc f est une application linéaire.

$$2) \text{ Soit } f : \begin{cases} \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X] \\ P \longmapsto P' - P \end{cases}$$

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \forall Q \in \mathbb{R}[X], f(P + Q) = (P + Q)' - (P + Q) = P' + Q' - P - Q = P' - P + Q' - Q = f(P) + f(Q).$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, f(\lambda P) = (\lambda P)' - \lambda P = \lambda P' - \lambda P = \lambda(P' - P) = \lambda f(P).$$

Donc f est un endomorphisme de  $\mathbb{R}[X]$ .

Propriété :

Soit E et F deux espaces vectoriels, et f une application linéaire de E vers F. Alors :

\_  $f(0) = 0$

\_ l'image d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des images :

$$\text{si } X = \lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_p X_p, \text{ alors } f(X) = \lambda_1 f(X_1) + \dots + \lambda_p f(X_p).$$

## 4.2 Représentation matricielle des applications linéaires

Propriété :

\_ Soit  $M \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ . Alors l'application  $f : \begin{cases} M_{p,1}(\mathbb{R}) \longrightarrow M_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X \longmapsto MX \end{cases}$  est une application linéaire.

\_ Inversement, si  $f$  une application linéaire de  $M_{p,1}(\mathbb{R})$  dans  $M_{n,1}(\mathbb{R})$ .

Alors il existe une matrice  $M_f \in M_{n,p}(\mathbb{R})$  telle que :  $\forall X \in M_{p,1}(\mathbb{R}), f(X) = M_f X$ .

$M_f$  est appelée matrice de l'endomorphisme  $f$  dans les bases canoniques.

Exemple :

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x + y \\ -x + 3y \end{pmatrix}$

Alors  $f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ . Donc  $f$  est une application linéaire de matrice  $M_f = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

Remarque : Les colonnes de  $M_f$  sont les images de la base canonique

Base canonique de  $\mathbb{R}^2$  :  $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$   $E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$   $f(E_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$   $f(E_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

donc  $M_f$  contient les vecteurs colonnes  $f(E_1), f(E_2)$ .

## 4.3 Noyau et image d'une application linéaire

Définition :

Soit  $f$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$ .

On appelle noyau de  $f$ , noté  $\text{Ker } f$ , l'ensemble des antécédents de 0.

$$\text{Ker } f = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}$$

On appelle image de  $f$ , noté  $\text{Im } f$ , l'ensemble des images par  $f$  des éléments de  $E$ .

$$\text{Im } f = \{f(x), x \in E\} = \{y \in F \mid \exists x \in E, y = f(x)\}.$$

Attention :  $\text{Ker } f \subset E, \text{Im } f \subset F$ .

Remarque :  $Y \in \text{Im}(f)$  si et seulement si l'équation  $f(X) = Y$  admet au moins une solution.

$$\Leftrightarrow Y \text{ admet au moins un antécédent par } f.$$

Propriété : Soit  $f$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$ .

Alors  $\text{Ker } f$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , et  $\text{Im } f$  est un sous-espace vectoriel de  $F$ .

Exemple :

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x - 2y \\ -x/2 + y \end{pmatrix}$ .

Déterminer  $\text{Ker } f$  et  $\text{Im } f$ .

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \text{Ker } f \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 0 \\ -x/2 + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1$$

On prend  $y$  comme inconnue secondaire :  $x = 2y$

$$\text{Ker } f = \{(y, 2y), y \in \mathbb{R}\} = \{y(1; 2), y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1, 2)).$$

\_ Soit  $Y = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ . On cherche à quelle(s) condition(s) le système  $\begin{cases} x - 2y = a \\ -x/2 + y = b \end{cases}$  admet une ou des solutions.

(S)  $\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = a \\ 0 = a + 2b \end{cases}$  admet des solutions si et seulement si  $0 = a + 2b \Leftrightarrow a = -2b$

$$\text{Im } f = \left\{ \begin{pmatrix} -2b \\ b \end{pmatrix}, b \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Propriété : Si  $f$  est une application linéaire de  $M_{n,1}(\mathbb{R})$  vers  $M_{p,1}(\mathbb{R})$  et si  $e_1, \dots, e_n$  est la base canonique de  $M_{n,1}(\mathbb{R})$  alors  $\text{Im } f = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$

Exemple précédent :

Base canonique de  $\mathbb{R}^2$  :  $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 - 2 \times 0 \\ -1/2 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix} \quad f(e_2) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ Donc } \text{Im}(f) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\text{Or } \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ donc } \text{Im}(f) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Propriété :

Soit  $f$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$ . Alors :

\_  $f$  est injective si et seulement si  $\text{Ker } f = \{0_E\}$

\_  $f$  est surjective si et seulement si  $\text{Im } f = F$ .

Démonstration :

\_ si  $f$  est injective : soit  $x \in \text{Ker } f$  : alors  $f(x) = 0$  donc  $f(x) = f(0)$  comme  $f$  est injective  $x = 0$ .

Donc  $\text{Ker } f = \{0\}$ .

\_ si  $\text{Ker } f = \{0\}$  : si  $f(x) = f(x')$   $f(x) - f(x') = 0$   $f(x - x') = 0$  ( $f$  linéaire)

Donc  $x - x' \in \text{Ker } f$ , donc  $x - x' = 0$   $x = x'$ .

\_ surjectivité : immédiat d'après définition.

Exemple précédent :  $\text{ker } f \neq \{0\}$  donc  $f$  n'est pas injective.

$\text{Im } f \neq \mathbb{R}^2$  donc  $f$  n'est pas surjective.

Propriété :

Soit  $f$  un endomorphisme de  $M_{n,1}(\mathbb{R})$  de matrice  $M_f$  dans la base canonique.

Alors  $f$  est une bijection si et seulement si  $M_f$  est inversible.

Dans ce cas  $f^{-1}$  est un endomorphisme et  $M_{f^{-1}} = M_f^{-1}$

$$\text{Ex : } f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y \\ -x + 3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

On peut montrer que  $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$  est inversible et que  $M^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Donc  $f$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}^2$  sur  $\mathbb{R}^2$  et son application réciproque est :

$$f^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3x - y \\ x + 2y \end{pmatrix}$$

#### 4.4 Applications linéaires et système linéaire :

Soit un système linéaire qui s'écrit  $AX = B$ , avec  $X \in M_{p,1}(\mathbb{R})$  et  $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ .  $B \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ .

Soit  $f$  l'application linéaire  $\begin{cases} M_{p,1}(\mathbb{R}) \longrightarrow M_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X \longmapsto AX \end{cases}$ .

Alors les solutions du système homogène associé sont les éléments de  $\text{Ker}(f)$ .

En effet  $AX = 0 \Leftrightarrow f(X) = 0 \Leftrightarrow X \in \text{Ker}(f)$ .

L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène est donc un sous-espace vectoriel.

Le système  $AX = B$  a des solutions si et seulement s'il existe  $X$  tel que  $f(X) = B$ , donc si et seulement si  $B \in \text{Im } f$ .

Système de Cramer :

Propriété :

Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . Les trois conditions suivantes sont équivalentes :

(i)  $A$  est inversible

(ii) le système (S) :  $AX = 0$  est un système de Cramer

(ii) l'endomorphisme  $f : \begin{cases} M_{n,1}(\mathbb{R}) \longrightarrow M_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X \longrightarrow AX \end{cases}$  est bijectif.