

## 1. Définitions

### 1.1 Définition d'une matrice

Définition :

Soient  $n$  et  $p$  deux entiers naturels non nuls.

On appelle matrice réelle à  $n$  lignes et  $p$  colonnes un tableau de nombres réels à  $n$  lignes et  $p$  colonnes.

Notation :

Soit  $A$  une matrice à  $n$  lignes et  $p$  colonnes.

Si on note  $a_{i,j}$  le nombre situé à la  $i$ -ème ligne et à la  $j$ -ème colonne, alors

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}.$$

On note aussi  $A = (a_{i,j})_{i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, p\}}$ .

L'ensemble des matrices réelles à  $n$  lignes et  $p$  colonnes est noté  $M_{n,p}(\mathbb{R})$ .

Cas particuliers :

\_ si  $n = 1$  : la matrice est appelée matrice ligne

\_ si  $p = 1$  : la matrice est appelée matrice colonne.

\_ un élément  $(x_1; \dots; x_n)$  de  $\mathbb{R}^n$  peut être représenté par la matrice colonne  $\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ .

\_ On appelle matrice nulle (notée  $O_{n,p}$ ) la matrice dont tous les coefficients sont nuls.

Exemples :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ \sqrt{2} & 5/2 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \in M_{3,2}(\mathbb{R})$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \in M_{2,1}(\mathbb{R}) : \text{c'est une matrice colonne.}$$

$$C = (1 \ 0 \ 1) \in M_{1,3}(\mathbb{R}) : \text{c'est une matrice ligne.}$$

### 1.2 Vocabulaire des matrices

Définitions :

\_ Une matrice carrée est une matrice dont le nombre de lignes est égal au nombre de colonnes.

\_ Une matrice carrée est dite diagonale si tous les termes qui ne sont pas sur la diagonale sont

$$\text{nuls : } \forall (i,j) \in \{1, \dots, n\}^2 \quad i \neq j \Rightarrow a_{i,j} = 0. \quad D = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

\_ La matrice identité (ou unité) est la matrice diagonale qui ne contient que des 1 sur la

diagonale. On la note  $I_n$ . 
$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

\_ Une matrice triangulaire supérieure est une matrice carrée dont tous les termes sous la diagonale sont nuls :  $\forall (i,j) \in \{1,\dots,n\}^2 \quad i > j \Rightarrow a_{i,j} = 0$ .

$$T = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

\_ Une matrice triangulaire inférieure est une matrice carrée dont tous les termes au-dessus de la diagonale sont nuls :  $\forall (i,j) \in \{1,\dots,n\}^2 \quad i < j \Rightarrow a_{i,j} = 0$ .

$$T = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & 0 \\ a_{n,1} & & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

\_ Une matrice carrée est symétrique si les éléments symétriques par rapport à la diagonale sont égaux.  $\forall (i,j) \in \{1,\dots,n\}^2 \quad a_{j,i} = a_{i,j}$ .

Ces matrices étant d'une étude plus simple, on se ramène souvent à des matrices de ce type.

Exemples :

$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$  est diagonale      $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$  est triangulaire supérieure

$B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$  est triangulaire inférieure.      $S = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$  est symétrique

## 2. Opérations sur les matrices

### 2.1 Addition de deux matrices

Définition :

Soient A et B deux matrices de  $M_{n,p}(\mathbb{R})$ .

$A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$  et  $B = (b_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ .

La matrice  $A + B$  est la matrice de  $M_{n,p}(\mathbb{R})$  définie par :

$$A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})_{i \in \{1,\dots,n\}, j \in \{1,\dots,p\}}$$

Remarque :

Pour additionner deux matrices, il faut qu'elles aient le même nombre de lignes et le même nombre de colonnes.

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{alors } A + B = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Propriété :

Pour toutes matrices A, B, C de  $M_{n,p}(\mathbb{R})$ ,

$$A + 0 = 0 + A = A$$

$$A + B = B + A$$

$$(A + B) + C = A + (B + C).$$

## 2.2 Multiplication d'une matrice par un nombre

Définition :

Soit  $A = (a_{i,j})$  une matrice de  $M_{n,p}(\mathbb{R})$  et  $\lambda$  un réel.

Alors la matrice  $\lambda A$  est la matrice de  $M_{n,p}(\mathbb{R})$  définie par :

$$\lambda A = (\lambda a_{i,j})_{i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, p\}}$$

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{alors } 3A = \begin{pmatrix} 3 & 12 \\ -6 & 0 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}.$$

Propriété :

Pour toutes matrices A et B de  $M_{n,p}(\mathbb{R})$ , pour tous réels  $\lambda$  et  $\mu$ ,

$$1A = A$$

$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$$

$$(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$$

$$\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$$

Remarque : Soit  $\lambda$  est un réel et A une matrice. Si  $\lambda A = 0$  alors  $\lambda = 0$  ou  $A = 0$ .

## 2.3 Multiplication de deux matrices

Définition :

Soit  $A = (a_{i,j}) \in M_{p,n}(\mathbb{R})$  et  $B = (b_{i,j}) \in M_{n,q}(\mathbb{R})$ .

On appelle produit des matrices A et B la matrice AB appartenant à  $M_{p,q}(\mathbb{R})$  définie par :

si  $AB = (c_{i,j})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q}$ ,

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} (= a_{i,1} b_{1,j} + a_{i,2} b_{2,j} + \dots + a_{i,n} b_{n,j}) \quad \forall i \in \{1, \dots, p\}, \forall j \in \{1, \dots, q\}$$

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -11 & 9 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} -11 & 9 \\ 7 & -1 \end{pmatrix} \quad B \times A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ -4 & 10 & 2 \\ 6 & 17 & -4 \end{pmatrix}$$

Remarques :

\_ pour que le produit  $A \times B$  ait un sens, il faut que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B.

\_ de manière générale  $A \times B \neq B \times A$  (ces matrices n'ont même pas forcément le même nombre de lignes et de colonnes).

\_ si  $A \times B = B \times A$ , on dit que les matrices A et B commutent.

\_ attention, il se peut que  $A \times B = 0$  sans que  $A = 0$  ou  $B = 0$

Exemple :  $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$   $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$ . Alors  $A \times B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2$

Propriétés de la multiplication de matrices :

$$\forall A, A' \in M_{p,n}(\mathbb{R}), \forall B, B' \in M_{n,q}(\mathbb{R}), \forall C \in M_{q,r}(\mathbb{R}), \forall k \in \mathbb{R}$$

$$(A \times B) \times C = A \times (B \times C) \quad (\text{associativité})$$

$$A.(B + B') = A.B + A.B'$$

$$(A + A').B = A.B + A'.B$$

$$(\lambda A).B = A.(\lambda B) = \lambda(A.B)$$

$$I_p \times A = A \quad A \times I_n = A$$

Exemples : \_ Si  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . Factoriser  $A^2 + 3A$  ?

$$A^2 + 3A = A \times A + A \times 3I = A(A + 3I) \text{ et non pas } A(A + 1) \text{ qui n'a aucun sens !}$$

\_ Si  $A$  et  $B \in M_n(\mathbb{R})$  telles que  $A^2 = B$ , est-ce que  $A$  et  $B$  commutent ?

$$A \times B = A \times A^2 = A^3 \quad B \times A = A^2 \times A = A^3 \text{ donc } A \text{ et } B \text{ commutent.}$$

## 2.4 Transposée d'une matrice

Définition :

Soit  $A = (a_{i,j}) \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ . On appelle transposée de  $A$ , notée  ${}^tA$ , la matrice appartenant à  $M_{p,n}(\mathbb{R})$  définie par :  ${}^tA = (a_{j,i})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n}$

Exemple :  $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$   ${}^tA = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

Propriété :  $\forall A, A' \in M_{n,p}(\mathbb{R}), \forall B \in M_{p,q}(\mathbb{R}), \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$${}^t({}^tA) = A$$

$${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$$

$${}^t(\lambda A) = \lambda ({}^tA)$$

$${}^t(A \times B) = {}^tB \times {}^tA$$

Remarque : Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$ .  $A$  est symétrique si et seulement si  ${}^tA = A$

Exemple : Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  et  $B = {}^tAA$ .

Alors  ${}^tB = {}^t({}^tAA) = {}^tA({}^tA) = {}^tAA = B$  donc  $B$  est symétrique.

## 2.5 Ecriture matricielle d'un système

Soit (S) le système d'équation : 
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

Notons  $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}$ ,  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_p \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$ .

Alors le système (S) s'écrit matriciellement :  $AX = B$ .  $A$  est appelée matrice du système.

Exemple : Le système  $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = -2 \\ 3x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$  s'écrit aussi :  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

### 3. Matrices carrées

#### 3.1 Opérations sur les matrices carrées

- \_ si  $A \in M_n(\mathbb{R})$  alors  ${}^tA \in M_n(\mathbb{R})$  et  $\lambda A \in M_n(\mathbb{R})$  ( $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ ).
- \_ si  $A \in M_n(\mathbb{R})$  et  $B \in M_n(\mathbb{R})$  alors  $A + B \in M_n(\mathbb{R})$  et  $AB \in M_n(\mathbb{R})$  (on dit que  $M_n(\mathbb{R})$  est stable par addition et par produit).

#### 3.2 Matrices inversibles

Définition : Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$ .

S'il existe une matrice  $B \in M_n(\mathbb{R})$  telle que  $A \times B = I_n$  ou  $B \times A = I_n$ , alors on dit que  $A$  est inversible et  $B$  est appelée matrice inverse de  $A$ , notée  $A^{-1}$ .

A retenir :  $A^{-1}A = I_n$ ,  $AA^{-1} = I_n$ .

On note  $GL_n(\mathbb{R})$  (groupe linéaire) l'ensemble des matrices inversibles de  $M_n(\mathbb{R})$ .

Exemple :

Soit  $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ . Montrer que  $A$  est inversible et que  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1/2 & -3/2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1/2 & -3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \quad \text{Donc } A \text{ est inversible et } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1/2 & -3/2 \end{pmatrix}.$$

Propriété :

- \_  $I_n$  est inversible et  $I_n^{-1} = I_n$
- \_ si  $A$  est inversible, alors  $A^{-1}$  est inversible, et  $(A^{-1})^{-1} = A$ .
- \_ si  $A$  est inversible, alors  ${}^tA$  est inversible et  $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$
- \_ si  $A$  est inversible et  $\lambda \neq 0$ , alors  $\lambda A$  est inversible et  $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$
- \_ si  $A$  et  $B$  sont inversibles, alors  $AB$  est inversible et  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- \_ il n'y a pas de propriété entre addition et inverse !!

Propriété : Si on multiplie (à gauche ou à droite) les deux membres d'une égalité matricielle par une matrice inversible, on obtient une égalité équivalente.

Propriété (à savoir redémontrer)

Soit  $P \in M_n(\mathbb{R})$  une matrice inversible.

Soient  $X, X' \in M_{n,1}(\mathbb{R})$  et  $A, A' \in M_n(\mathbb{R})$ .

Alors  $X = PX' \Leftrightarrow X' = P^{-1}X$

$$A = PA'P^{-1} \Leftrightarrow A' = P^{-1}AP$$

Démonstration :

$$X = PX' \Leftrightarrow P^{-1}X = P^{-1}PX' = IX' = X'$$

$$A = PA'P^{-1} \Leftrightarrow P^{-1}AP = P^{-1}PA'P^{-1}P = I_n A' = A'$$

Propriété :

\_ Soit A une matrice diagonale :  $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ .

Alors A est inversible si et seulement si  $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \lambda_i \neq 0$ .

Dans ce cas,  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/\lambda_2 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1/\lambda_n \end{pmatrix}$ .

\_ Soit A une matrice triangulaire supérieure :  $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & 0 & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$

Alors A est inversible si et seulement si  $\forall i \in \{1, \dots, n\}, a_{i,i} \neq 0$ .

Dans ce cas,  $A^{-1}$  est aussi une matrice triangulaire supérieure.

(propriété identique pour les matrices triangulaires inférieures).

Exemples :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$  est inversible (matrice diagonale) et  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$  n'est pas inversible (matrice triangulaire avec un zéro sur la diagonale)

$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$  est inversible (matrice triangulaire avec coefficients diagonaux non nuls).

Attention,  $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  est inversible (bien que zéros sur la diagonale)

### 3.3 Calcul pratique de l'inverse d'une matrice

Soit A une matrice de  $M_n(\mathbb{R})$ .

*Méthode pour calculer  $A^{-1}$  :*

Principe : On transforme simultanément A et  $I_n$  par les mêmes opérations sur les lignes, jusqu'à avoir transformé A en  $I_n$ . L'image de  $I_n$  est alors  $A^{-1}$ .

Pour cela

1) On transforme A en une matrice triangulaire supérieure (pivot de Gauss)

\_ si la diagonale contient au moins un 0, A n'est pas inversible

\_ si aucun coefficient diagonal n'est nul, A est inversible.

Dans ce cas :

2) On transforme cette matrice en une matrice diagonale (en éliminant par pivot les termes au-dessus de la diagonale en commençant par la dernière colonne).

3) On transforme cette matrice en  $I_n$ .

Exemple :  $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 21 & 7 \\ 0 & 7 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow 2L_2 + 3L_1 \quad L_3 \leftarrow 2L_3 + L_1$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 21 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow 3L_3 - L_2$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 6 & 0 \\ 0 & 42 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & -6 \\ 6 & 18 & -42 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow 2L_1 - L_3 \quad L_2 \leftarrow 2L_2 - 7L_3$$

$$\begin{pmatrix} -28 & 0 & 0 \\ 0 & 42 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 8 & -4 & 0 \\ 6 & 18 & -42 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow 7L_1 - L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -2/7 & 1/7 & 0 \\ 1/7 & 3/7 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow -L_1/28 \quad L_2 \leftarrow L_2/42 \quad L_3 \leftarrow L_3/2$$

Donc  $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2/7 & 1/7 & 0 \\ 1/7 & 3/7 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ .

### 3.4 Matrice inversible et système de Cramer

Propriété : Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  et  $B \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ .

Alors le système  $AX = B$  est un système de Cramer si et seulement si la matrice  $A$  est inversible. Dans ce cas la solution unique est  $X = A^{-1}B$ .

Exemple : (S) :  $\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 = 5 \\ x_1 - 2x_2 = 1 \end{cases}$

Si on pose  $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ . (S)  $\Leftrightarrow AX = B$ . On a vu que  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1/2 & -3/2 \end{pmatrix}$ .

Alors  $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1/2 & -3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 1 \end{cases}$

Remarque : Pour calculer  $A^{-1}$ , on peut donc résoudre le système  $AX = Y$ , où  $Y$  est une matrice quelconque. Si on trouve une matrice  $B$  telle que  $X = BY$ , alors  $A$  est inversible et  $A^{-1} = B$ .

Exemple :  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  Si  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  et  $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ , alors

$$AX = Y \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 = y_1 \\ x_1 - x_2 = y_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 = y_1 & L_1 \\ -3x_2 = 2y_2 - y_1 & L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{y_1}{2} - \frac{y_1}{6} + \frac{y_2}{3} = \frac{y_1}{3} + \frac{y_2}{3} \\ x_2 = \frac{y_1}{3} - \frac{2y_2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Donc  $A$  est inversible et  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$ .

### 3.5 Puissance d'une matrice

Si  $A \in M_p(\mathbb{R})$ , on peut définir  $A^2, A^3, \dots, A^n$ . ( $A^{n+1} = A^n \times A = A \times A^n$ )  
 Par convention,  $A^0 = I_p, A^1 = A$ .

Propriété :

si  $D$  est une matrice diagonale  $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \dots & \\ 0 & & \lambda_p \end{pmatrix}$ . Alors  $\forall n \in \mathbb{N}, D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & & 0 \\ & \dots & \\ 0 & & \lambda_p^n \end{pmatrix}$ .

Remarque : soit  $A, B, P$  des matrices telles que  $P$  est inversible et  $A = PBP^{-1}$ .  
 Alors  $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = (PBP^{-1})(PBP^{-1})\dots(PBP^{-1}) = PBB\dots BP^{-1} = PB^n P^{-1}$ .

Pour démontrer une formule pour  $A^n$  (avec ou sans coefficients indéterminés), on peut utiliser la démonstration par récurrence.

Exemple avec des coefficients indéterminés : Soit  $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Montrer qu'il existe deux suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  telles que :  $\forall n \in \mathbb{N}, M^n = \begin{pmatrix} a_n & 3^n b_n \\ 0 & a_n \end{pmatrix}$

Déterminer l'expression de  $(a_n)$  et  $(b_n)$ .

Par récurrence sur  $n$  :

$M^0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Donc  $a_0 = 1$  et  $b_0 = 0$  conviennent.

Supposons que  $M^n = \begin{pmatrix} a_n & 3^n b_n \\ 0 & a_n \end{pmatrix}$

alors  $M^{n+1} = M^n \times M = \begin{pmatrix} a_n & 3^n b_n \\ 0 & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a_n & 2a_n + 3^{n+1}b_n \\ 0 & 3a_n \end{pmatrix}$

En posant  $a_{n+1} = 3a_n$  et  $b_{n+1} = \frac{2a_n}{3^{n+1}} + b_n$ , on obtient :  $M^{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} & 3^{n+1}b_{n+1} \\ 0 & a_{n+1} \end{pmatrix}$

Donc  $\forall n \in \mathbb{N}, M^n = \begin{pmatrix} a_n & 3^n b_n \\ 0 & a_n \end{pmatrix}$

$(a_n)$  est géométrique de raison 3 donc  $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = a_0 \times 3^n = 3^n$

Donc  $\forall n \in \mathbb{N}, b_{n+1} = \frac{2 \times 3^n}{3^{n+1}} + b_n = \frac{2}{3} + b_n$  donc  $(b_n)$  est arithmétique de raison  $r = \frac{2}{3}$ .

Donc  $\forall n \in \mathbb{N}, b_n = b_0 + nr = \frac{3n}{2}$ .

Conclusion :  $\forall n \in \mathbb{N}, M^n = \begin{pmatrix} 3^n & 2n3^{n-1} \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$

Définition :

Soit  $A$  une matrice de  $M_p(\mathbb{R})$ . S'il existe un entier  $n$  tel que  $A^n = 0$ , on dit que  $A$  est nilpotente.

Propriété : Formule du Binôme de Newton

Soient A et B  $\in M_p(\mathbb{R})$  telles que  $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$  (A et B commutent).

$$\text{Alors } \forall n \in \mathbb{N}, (A + B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$$

Exemple :

Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  alors  $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  A est nilpotente.

Soit  $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ . On cherche la formule de  $M^n$ .  $M = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 3I_2 + A$ .

Or, A et  $3I_2$  commutent, donc  $M^n = (3I_2 + A)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (3I_2)^{n-k} A^k$

$$\text{Or } A^2 = A^3 = \dots = 0 \text{ Donc } M^n = \binom{n}{0} (3I_2)^n A^0 + \binom{n}{1} (3I_2)^{n-1} A^1 = 3^n I_2 + n3^{n-1} A \\ = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \times 3^{n-1} \times n \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^n & 2n3^{n-1} \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$

Conclusion : Pour calculer  $A^n$  :

\_ si A est diagonale, alors  $A^n = \begin{pmatrix} a_{1,1}^n & & \\ & \dots & \\ & & a_{p,p}^n \end{pmatrix}$

\_ si  $A = PBP^{-1}$ , alors  $A^n = PB^nP^{-1}$

\_ si  $A = B + C$  avec B et C qui commutent, binôme de Newton

\_ si formule donnée (avec ou sans suites indéterminées) récurrence

### 3.6 Suites récurrentes, marches aléatoires et puissances de matrices

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de matrices de  $M_{p,1}(\mathbb{R})$ , et  $M \in M_p(\mathbb{R})$ .

Si pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X_{n+1} = MX_n$  alors on peut montrer que  $\forall n \in \mathbb{N} X_n = M^n X_0$  (par récurrence sur n, à redémontrer à chaque fois) (analogie avec suites géométriques de raison M)

Exemple : Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites telles que :  $u_1 \in \mathbb{R}$ ,  $v_1 \in \mathbb{R}$  et  $\forall n \geq 1$ ,

$$\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = 3v_n \end{cases}$$

Si on note  $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ , alors  $MX_n = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3u_n + 2v_n \\ 3v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}$ .

Montrons que  $\forall n \geq 1$ ,  $X_n = M^{n-1} X_1$  par récurrence :

\_ pour  $n = 1$   $M^{1-1} X_1 = IX_1 = X_1$

\_ si  $X_n = M^{n-1} X_1$  alors  $X_{n+1} = MX_n = MM^{n-1} X_1 = M^n X_1$

Donc  $\forall n \geq 1$ ,  $X_n = M^{n-1} X_1$

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}, X_n = M^n X_0 = \begin{pmatrix} 3^{n-1} & 2(n-1)3^{n-2} \\ 0 & 3^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^{n-1}u_1 + 2(n-1)3^{n-2}v_1 \\ 3^{n-1}v_1 \end{pmatrix}.$$

Donc  $u_n = 3^{n-1}u_1 + 2(n-1)3^{n-2}v_1$  et  $v_n = 3^{n-1}v_1$ .

Remarque :

Dans le cas de marches aléatoires, l'énoncé se traduit souvent, à l'aide de la formule des probabilités totales, par une formule du type  $X_{n+1} = MX_n$ . Comme  $X_n = M^n X_0$ , il faut donc déterminer  $M^n$ .

Exemple :

Une puce se déplace entre 2 cases A et B. A l'instant  $n=0$ , elle est en A.

Si elle est sur A, elle se déplace sur A et B avec la même probabilité. Si elle est en B, elle reste en B avec une probabilité  $2/3$ .

Soit  $A_n$  l'événement "elle est en A à l'instant  $n$ " et  $B_n =$  "elle est en B à l'instant  $n$ ".

Posons  $a_n = P(A_n)$  et  $b_n = P(B_n)$

Alors d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n + \frac{1}{3} b_n \\ b_{n+1} = \frac{1}{2} a_n + \frac{2}{3} b_n \end{cases}$$

$$\text{Donc } \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

En posant  $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$  et  $M = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 2/3 \end{pmatrix}$ , on a :  $X_{n+1} = MX_n$  (donc  $X_n = M^n X_0 \dots$ ).