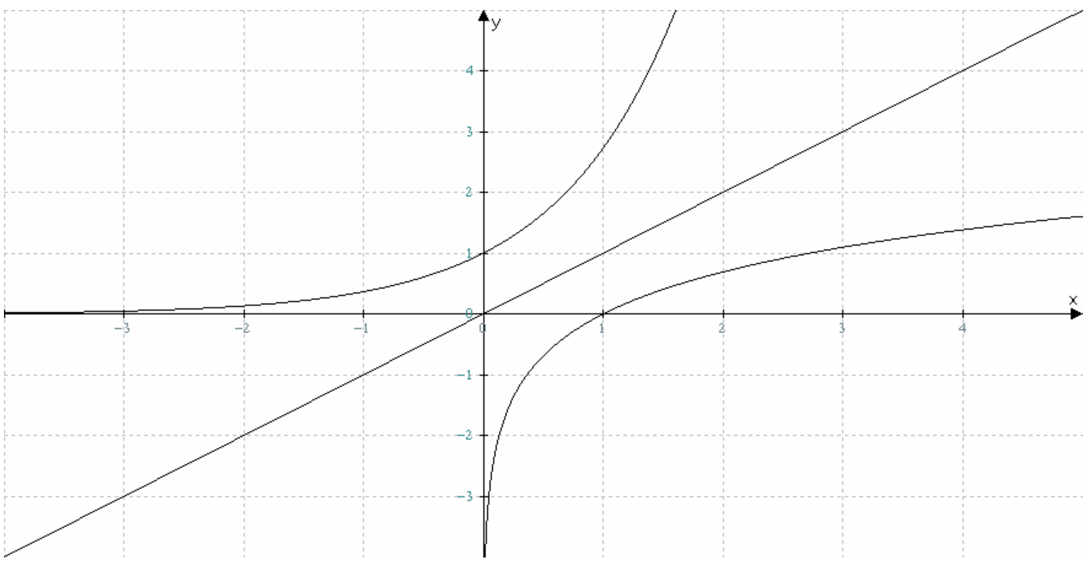
Chapitre 15 : Fonctions usuelles

1. Fonctions exponentielles et logarithmes

Rappel : exp et ln sont des applications réciproques.
C_{exp} et C_{ln} sont donc symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Fonction	exp	ln
Définie et C^∞ sur I =	$\mathbb{R}$	$]0; +\infty[$
f(I) =	$]0; +\infty[$	$\mathbb{R}$
Signe	x $-\infty$ $+\infty$ e^x +	x 0 1 $+\infty$ ln(x) – 0 +
Limites et branches infinies	$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ Branche parabolique direction (Oy) $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$ A.H. d'équation $y = 0$	$\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$ $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ Branche parabolique direction (Ox) $\lim_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$ A.V. d'équation $x = 0$
Dérivée	e^x	$\frac{1}{x}$
Variations	croissante	croissante
Convexité	$f''(x) = e^x > 0 \Rightarrow$ convexe	$f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \Rightarrow$ concave



2 Fonction s du type $x \longmapsto u(x)^{v(x)}$

Rappel :
Soit a et b deux réels avec a>0. On définit le nombre a^b par $a^b = e^{b\ln(a)}$.

Remarque :
$\forall$ a > 0, $a^0 = 1$, $a^1 = a$, $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$ $a^{1/2} = \sqrt{a}$, $a^{1/3} = \sqrt[3]{a}$, $a^{3/2} = a\times a^{1/2} = a\sqrt{a}$...

Soient u et v des fonctions définies sur un intervalle I.
La fonction $f : x \longmapsto u(x)^{v(x)}$ n'est définie que si $u(x) > 0$.
Dans ce cas : $f(x) = e^{v(x)\ln(u(x))}$
C'est sous cette forme que l'on peut calculer la dérivée de f, ou ses limites.

Exemple :
Soit f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = x^x$
$f(x) = e^{x\ln(x)}$ $f'(x) = (\ln(x) + 1)e^{x\ln(x)}$ $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(x) + 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1/e$

x	0		$1/e$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	↘	$1/e^{1/e}$	↗	$+\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x\ln(x) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to 0} x\ln(x) = 0$ (croissances comparées)

donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$. $f(1/e) = \left(\dfrac{1}{e}\right)^{1/e} = \dfrac{1}{e^{1/e}}$.

3. Fonctions puissances $x \longmapsto x^{\alpha}$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On étudie la fonction $f : \begin{cases}]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^{\alpha} \end{cases}$

$\forall x > 0$ $f_{\alpha}(x) = e^{\alpha \ln(x)}$

Si $\alpha = 0$, f est constante. On suppose maintenant $\alpha \neq 0$.

_ Dérivée, variations, convexité :

f_{α} est dérivable comme composée de fonctions dérivables et $f_{\alpha}'(x) = \frac{\alpha}{x} e^{\alpha \ln(x)} = \frac{\alpha x^{\alpha}}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}$

- si $\alpha > 0$ f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$
- si $\alpha < 0$ f est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$

$f''(x) = \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2}$

- si $\alpha > 1$ ou $\alpha < 0$, f est convexe
- si $0 < \alpha < 1$, f est concave

_ Limite en $+\infty$:

- si $\alpha < 0$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \alpha \ln(x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\alpha} = 0$ (A.H. d'équation $y = 0$)
- si $\alpha > 0$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \alpha \ln(x) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\alpha} = +\infty$

$\frac{x^{\alpha}}{x} = x^{\alpha - 1}$: -si $0 < \alpha < 1$: $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\alpha - 1} = 0$: branche parabolique de direction (Ox).

- si $\alpha = 1$: C_f est une droite
- si $\alpha > 1$: $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\alpha - 1} = +\infty$: branche parabolique de direction (Oy).

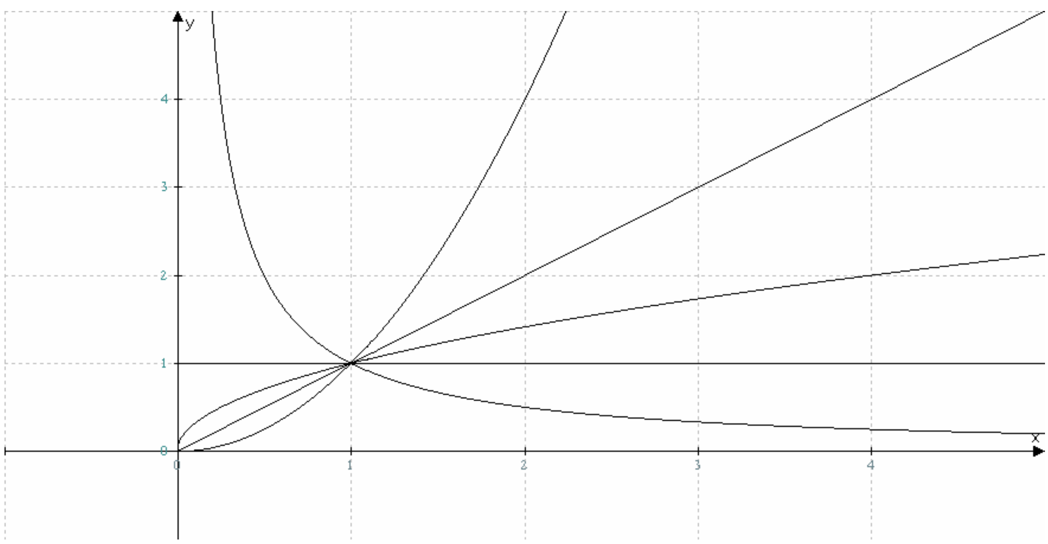
_ Limite en 0 :

- si $\alpha > 0$: $\lim\limits_{x \to 0} \alpha \ln(x) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\alpha} = +\infty$ (A.V. d'équation $x = 0$)
- si $\alpha < 0$: $\lim\limits_{x \to 0} \alpha \ln(x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\alpha} = 0$: on peut prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$

$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^{\alpha}}{x} = x^{\alpha-1}$

si $\alpha > 1$: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$: demi-tangente horizontale

si $0 < \alpha < 1$ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty$: demi-tangente verticale

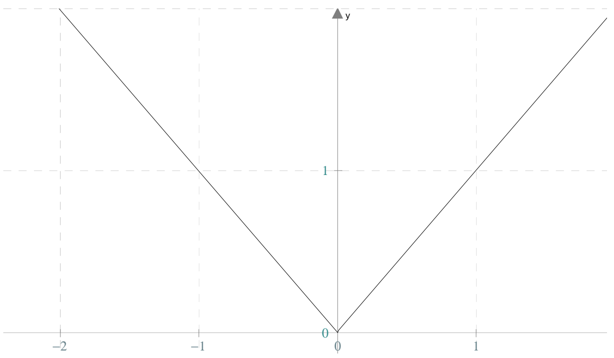


4. Fonction valeur absolue / Fonction partie entière

4.1 Valeur absolue

Définition : $\forall x \in \mathbb{R}, |x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$

Courbe :



La fonction est continue sur $\mathbb{R}$, et dérivable sur $\mathbb{R} - \{0\}$

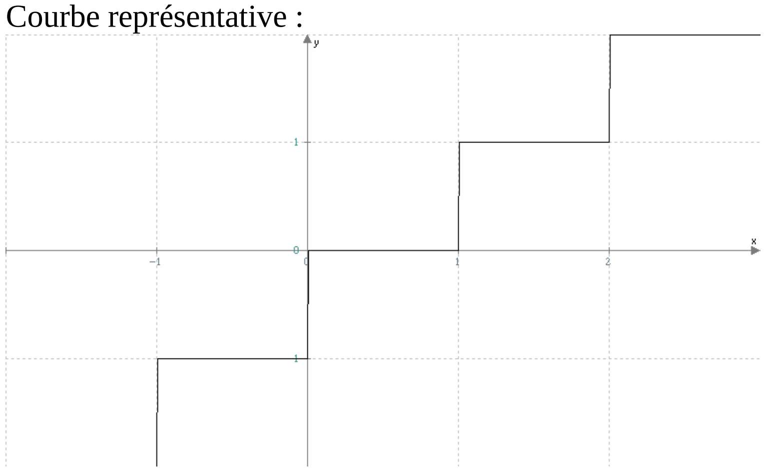
4.2 Partie entière

Définition : La fonction partie entière est la fonction définie sur $\mathbb{R}$, qui a tout réel x, associe le plus grand entier inférieur ou égal à x. On note Ent(x) ou [x] ce nombre.

Exemple : Ent(3,5) = 3 Ent(-3,5) = -4

Remarque :
On a donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\text{Ent}(x) \leq x < \text{Ent}(x) + 1$ et $x - 1 < \text{Ent}(x) \leq x$

Courbe représentative :



Ent n'est pas continue en tout $n \in \mathbb{Z}$, mais est continue à droite.