Chapitre 14 : Applications de la dérivation

1. Dérivée et variations d'une fonction

Théorème :
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et soit $x_0 \in$ I.
Alors f admet un extremum local en x_0 si et seulement si f ' s'annule en x_0 en changeant de signe.

Théorème
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Alors :
_ f est croissante sur I si et seulement si $\forall$ x $\in$ I, f '(x) ≥ 0
_ f est décroissante sur I si et seulement si $\forall$ x $\in$ I, f '(x) ≤ 0.

Remarques :
_ si $\forall x \in$ I f '(x) > 0 (sauf éventuellement en des points isolés) alors f est strictement décroissante. (analogue pour décroissante)
_ Pour étudier le signe de f ', il est parfois utile d'étudier les variations de f ', donc le signe de f ''.

2. Prolongement des fonctions C^1

Théorème de prolongement de la dérivée :
Soit f une fonction continue sur un intervalle [a;b] et de classe C^1 sur]a;b].
_ Si f ' admet une limite finie en a, alors f est de classe C^1 sur [a;b] et $f'(a) = \lim_{x \to a} f'(x)$.
_ Si f ' admet une limite infinie en a, alors f n'est pas dérivable en a (graphiquement : tangente verticale en a)

Exemples :
1) $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$ f est C^1 sur]0; + ∞[(composée de fonctions C^1)
$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} e^{-1/x} = 0 = f(0)$ donc f est continue en 0.
si x > 0, $f'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-1/x}$ $\lim_{x \to 0} f'(x) = 0$ (croissances comparées)
donc f est dérivable en 0 et f '(0) = 0.
2) $g(x) = \sqrt{x}$ C^0 sur [0; + ∞[et C^1 sur]0; + ∞[avec $\forall x > 0$, $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\lim_{x \to 0} \frac{1}{2\sqrt{x}} = +\infty$ donc g n'est pas dérivable en 0.

3. Inégalité des accroissements finis

3.1 Inégalité des accroissements finis

Théorème : (IAF) $1^{\text{ère}}$ version
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a;b]$ $(a \leq b)$.
S'il existe deux réels m et M tels que $\forall x \in [a;b]$, $m \leq f'(x) \leq M$,
alors $m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$.

Exemple :
Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{2\sqrt{k+1}} \leq \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{k}}$
Posons $f(x) = \sqrt{x}$ sur $[k ; k + 1]$.
$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ si $x \in [k;k + 1]$, $k \leq x \leq k + 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{k} \leq 2\sqrt{x} \leq 2\sqrt{k+1}$
$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2\sqrt{k+1}} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{k}} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2\sqrt{k+1}} \leq f'(x) \leq \dfrac{1}{2\sqrt{k}}$
Donc d'après l'inégalité des accroissements finis,
$\dfrac{1}{2\sqrt{k+1}}(k + 1 - k) \leq f(k + 1) - f(k) \leq \dfrac{1}{2\sqrt{k}}(k + 1 - k) \Leftrightarrow \dfrac{1}{2\sqrt{k+1}} \leq \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{k}}$

Théorème (IAF) $2^{\text{ème}}$ version
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
S'il existe un réel K tel que $\forall x \in I$, $|f'(x)| \leq K$, alors pour tous $x_1, x_2 \in I$,
$|f(x_2) - f(x_1)| \leq K\,|x_2 - x_1|$

Remarque :
_ $|f'(x)| \leq K \Leftrightarrow -K \leq f'(x) \leq K$.
Pour montrer que $-K \leq f'(x) \leq K$, il faut souvent étudier les variations de f ', en étudiant le signe de f ''.
_ il faut bien vérifier que x_1 et x_2 appartiennent à l'ensemble I !

3.2 Application aux suites récurrentes

Beaucoup d'exercices se présentent sous la forme suivante. Les résultats sont à redémontrer à chaque fois.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On suppose que I est stable par f.
On définit la suite (u_n) par : $\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$
Puisque I est stable par f, on peut montrer (par récurrence), que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$.
Supposons que :
_ f admet un point fixe $\alpha \in I$
_ il existe un réel $K \geq 0$ (si possible < 1) tel que $\forall x \in I$, $|f'(x)| \leq K$
Alors, puisque u_n et α appartiennent à I, d'après l'IAF, on a :
$|f(u_n) - f(\alpha)| \leq K|u_n - \alpha| \Leftrightarrow |u_{n+1} - \alpha| \leq K|u_n - \alpha|$

D'après cette dernière inégalité, on peut montrer par récurrence, que :
$|u_n - \alpha| \leq K^n|u_0 - \alpha|$ (ou $|u_n - \alpha| \leq K^{n-1}|u_1 - \alpha|$…)

Donc $0 \leq |u_n - \alpha| \leq K^n|u_0 - \alpha|$

Si on a $K < 1$ (ce qui est très souvent le cas !), $\lim\limits_{n \to +\infty} K^n|u_0 - \alpha| = 0$, donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty}|u_n - \alpha| = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$.

Exemple :

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{5 + 3u_n}{4 + 4u_n} \end{cases}$.

On suppose qu'on a déjà montré que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0;2]$.

Soit f définie sur $[0;2]$ par $f(x) = \dfrac{5 + 3x}{4 + 4x}$

a) Montrer que $\forall\, x \in [0;2]$, $|f'(x)| \leq \dfrac{1}{2}$

b) Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - 1| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - 1|$

c) Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $|u_n - 1| \leq \dfrac{1}{2^n}$. En déduire la limite de (u_n).

a) $f'(x) = \dfrac{3(4 + 4x) - 4(5 + 3x)}{(4 + 4x)^2} = -\dfrac{8}{(4 + 4x)^2} = -\dfrac{1}{2(1 + x)^2}$

si $x \geq 0$ $\quad 1 + x \geq 1 \quad (1 + x)^2 \geq 1 \quad \dfrac{1}{2(1 + x)^2} \leq \dfrac{1}{2} \quad -\dfrac{1}{2(1 + x)^2} \geq -\dfrac{1}{2}$.

Donc $-\dfrac{1}{2} \leq f'(x) \leq 0$. Donc $|f'(x)| \leq \dfrac{1}{2}$

b) $1 \in [0;2]$, $u_n \in [0;2]$ et sur $[0;2]$, $|f'(x)| \leq \dfrac{1}{2}$. D'après l'inégalité des accroissements finis,

$|f(u_n) - f(1)| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - 1| \Leftrightarrow |u_{n+1} - 1| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - 1|$.

c) Par récurrence sur n :

_ pour $n = 0$: $|u_0 - 1| = |-1| = 1 \quad \dfrac{1}{2^0} = 1$ donc $|u_0 - 1| \leq \dfrac{1}{2^0}$

_ si $|u_n - 1| \leq \dfrac{1}{2^n}$ alors $|u_{n+1} - 1| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - 1| \leq \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2^n} \leq \dfrac{1}{2^{n+1}}$.

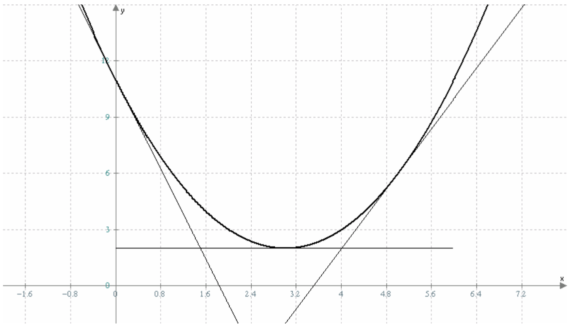
Conclusion : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $|u_n - 1| \leq \dfrac{1}{2^n}$.

$0 \leq |u_n - 1| \leq \dfrac{1}{2^n}$. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$, donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty}|u_n - 1| = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

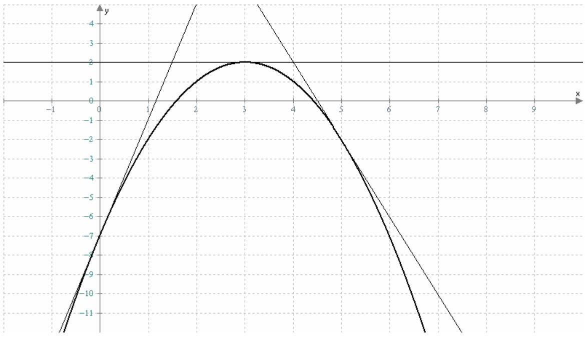
4. Convexité

Définition :
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
On dit que f est convexe sur I si la courbe représentative de f est au-dessus de ses tangentes en tout point de I.
On dit que f est concave sur I si la courbe représentative de f est en dessous de ses tangentes en tout point de I.

Courbe : f convexe



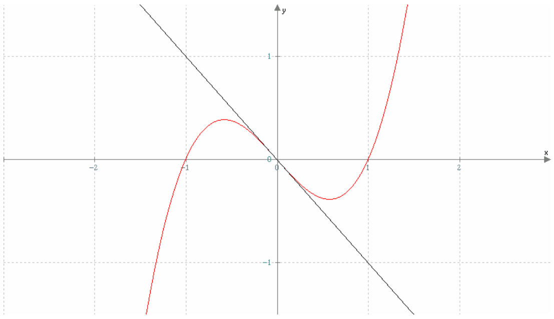
f concave



Remarques : f est convexe $\Leftrightarrow$ les arcs de courbe sont en-dessous des cordes.
f est convexe $\Leftrightarrow$ La courbe de f est "tournée vers le haut".
$\forall x \in I, \forall y \in I, f(y) \geq f(x) + (y - x)f'(x)$

Propriété :
_ Si f est dérivable sur I, alors f est convexe sur I si et seulement si f ' est croissante sur I.
_ Si f est de classe C^2 sur I, alors f est convexe sur I si et seulement si f '' ≥ 0 sur I.

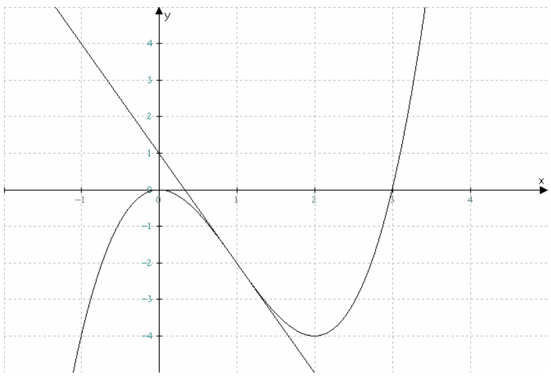
Définition :
On appelle point d'inflexion d'une courbe un point où la courbe traverse sa tangente.



Propriété : Si f est une fonction de classe C^2 sur I et si f '' s'annule en changeant de signe en x_0, alors la courbe de f admet un point d'inflexion en x_0.

Exemple : $f(x) = x^3 - 3x^2$ C^∞ sur $\mathbb{R}$
variations et convexité de f ?
$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f '(x)		+	0	–	0	+	
f(x)	$-\infty$	↗	0	↘	-4	↗	$+\infty$



$f''(x) = 6x - 6$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f ''(x)		–	0	+	
convexité		concave		convexe	

Point d'inflexion d'abscisse 1 f(1) = -2 Coefficient directeur de la tangente : f '(1) = -3