

Chapitre 13 : Dérivée d'une fonction

1. Dérivée en un point

1.1 Dérivabilité en un point

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I , et $a \in I$.

Si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe dans $\mathbb{R}$, on dit que f est dérivable en a .

Dans ce cas, on note $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$. $f'(a)$ est appelé le nombre dérivé de f en a .

De même, si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe, on définit la dérivée à gauche en a en posant $f'_g(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$. (de même à droite).

Remarques :

– On a aussi : f est dérivable en $a \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ existe. Et dans ce cas, $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

– $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est appelé taux de variation de f entre a et x .

Exemples :

1) f définie par : $f(x) = x^2 + 3x - 1$

f dérivable en 2 ? $f(2) = 9$ $\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{x^2 + 3x - 1 - 9}{x - 2} = \frac{x^2 + 3x - 10}{x - 2}$ (F.I.)

$= \frac{(x-2)(x+5)}{x-2} = x+5$ donc $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 2 + 5 = 7$ donc f est dérivable en 2 et $f'(2) = 7$.

(avec formules de Term : $f'(x) = 2x + 3$ $f'(2) = 7$)

2) $f \begin{cases} [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt{x} \end{cases}$ dérivable en 0 ?

$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ donc f n'est pas dérivable en 0.

3) f définie sur $[0; +\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = x^2 \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$. f est-elle dérivable en 0 ?

$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^2 \ln(x) - 0}{x} = x \ln(x)$ $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$ (croissances comparées), donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

Remarque : Dans la recherche de limite, il est parfois intéressant de reconnaître la forme d'un

taux de variation : $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

Exemple : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$: F.I. avec $f(x) = \sqrt{x}$ $\frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Or $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1)$ donc $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$ (vérifier par forme conjuguée).

Propriété : Si f est dérivable en a , alors f est continue en a .

Démonstration : pour $x \neq a$, $f(x) = f(x) - f(a) + f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a) + f(a)$

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a) = f'(a) \times 0 = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Remarque : la réciproque est fautive ! f peut être continue sans être dérivable.

$x \mapsto \sqrt{x}$ est continue en 0, mais pas dérivable. Idem pour la valeur absolue.

Propriété : Développement limité d'ordre 1 de f en a

Si f est dérivable en a , alors $f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + o(x - a)$

Démonstration : $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$ donc il existe une fonction g telle que :

$\forall x \neq a, \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) + g(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$.

Donc $f(x) - f(a) = f'(a)(x - a) + (x - a)g(x)$ $f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + (x - a)g(x)$

Or $\lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a)g(x)}{(x - a)} = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ donc $(x - a)g(x) = o(x - a)$ CQFD.

Remarque : $f(a) + f'(a)(x - a)$ est donc une bonne approximation de f au voisinage de a (on parle d'approximation affine de f en a). Cette approximation sera utilisée dans la méthode de Newton (cf cours d'informatique).

1.2 Tangente

Définition : Si f est dérivable en a , alors on appelle tangente de C_f au point d'abscisse a la droite (T) qui passe par le point $A(a; f(a))$ et qui a pour coefficient directeur $f'(a)$.

Propriété : L'équation de (T) est alors : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Exemple : $f(x) = x^2 + 3x - 1$ $f(2) = 9$ $f'(2) = 7$

Equation de la tangente : $y = f'(2)(x - 2) + f(2) = 7(x - 2) + 9 = 7x - 5$

Remarques :

_ si f est dérivable à gauche (à d.), on dit que C_f admet une demi-tangente à gauche (à droite)

_ si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \infty$, on dit que C_f admet une tangente verticale (d'équation $x = a$).

_ l'expression de la tangente est l'approximation affine de f . La tangente est la droite qui "approche" le mieux la courbe au voisinage de $A(a; f(a))$.

_ $f'(a) = 0 \Leftrightarrow C_f$ admet une tangente horizontale en a .

Lors du tracé d'une courbe après l'étude d'une fonction, les tangentes horizontales et les tangentes trouvées précédemment doivent obligatoirement apparaître ! (sous forme d'une double flèche)

_ la courbe doit être effectivement tangente à ses tangentes.

2. Dérivée sur un intervalle

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

Si, pour tout $a \in I$, f est dérivable en a , alors on dit que f est dérivable sur I .

Si f est dérivable sur I , on appelle fonction dérivée de f la fonction, notée f' , qui à tout $x \in I$ associe le nombre dérivé de f en x .

Remarque : $f'(x)$ est aussi notée $\frac{df}{dx}$

2.1 Dérivées des fonctions usuelles

Propriété :

f	dérivable sur	f'
$f(x) = x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}$, si $\alpha \in \mathbb{N}$ $] -\infty; 0[$ et $] 0; +\infty[$, si $\alpha \in \mathbb{Z} - \mathbb{N}$ $] 0; +\infty[$ sinon	$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$
$f(x) = e^x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = \ln(x)$	$] 0; +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{x}$

Exemples : $f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$ pour $x > 0$ $f'(x) = \frac{1}{2}x^{1/2-1} = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$ $f'(x) = -2x^{-2-1} = -2x^{-3} = \frac{-2}{x^3}$

2.2 Opérations sur les fonctions dérivables

Propriété :

Si u et v sont deux fonctions dérivables sur I et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$u + v, \lambda u, u \times v, u^2, \frac{1}{v}$ (si v ne s'annule pas) et $\frac{u}{v}$ (si v ne s'annule pas) sont dérivables sur I et :

$$(u + v)' = u' + v' \quad (\lambda u)' = \lambda u' \quad (uv)' = u'v + uv' \quad (u^2)' = 2uu' \quad \left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2} \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Démonstration : Soit $a \in I$

Posons $f = u + v$

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{u(x) + v(x) - (u(a) + v(a))}{x - a} = \frac{u(x) - u(a)}{x - a} + \frac{v(x) - v(a)}{x - a} \text{ donc tend vers } u'(a) + v'(a)$$

Posons $f = \lambda u$

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{\lambda u(x) - \lambda u(a)}{x - a} = \lambda \frac{u(x) - u(a)}{x - a} \text{ tend vers } \lambda u'(a)$$

Posons $f = uv$

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} &= \frac{u(x)v(x) - u(a)v(a)}{x - a} = \frac{u(x)(v(x) - v(a)) + u(x)v(a) - u(a)v(a)}{x - a} \\ &= u(x) \frac{v(x) - v(a)}{x - a} + v(a) \times \frac{u(x) - u(a)}{x - a} \end{aligned}$$

u est dérivable, donc continue en a : $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = u(a)$

donc tend vers $u(a)v'(a) + v(a)u'(a)$

avec $v = u$, on obtient : $(u \times v)' = u' u + u u' = 2 u u'$

Posons $f = \frac{1}{v}$

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{\frac{1}{v(x)} - \frac{1}{v(a)}}{x - a} = \frac{\frac{v(a) - v(x)}{v(a)v(x)}}{x - a} = -\frac{1}{v(a)v(x)} \times \frac{v(x) - v(a)}{x - a} \text{ tend vers } -\frac{1}{v(a)^2} \times v'(a)$$
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \left(u \times \frac{1}{v}\right)' = u' \times \frac{1}{v} + u \times \left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{u'}{v} - u \frac{v'}{v^2} = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Exemple : $f(x) = x^2 \ln(x)$ sur $]0; +\infty[$ f est dérivable comme produit de fonctions dérivables.

$$f'(x) = 2x \ln(x) + x^2 \times \frac{1}{x} = 2x \ln(x) + x.$$

Propriété (dérivée d'une composée) :

Soit u est une fonction définie sur un intervalle I et v une fonction définie sur un intervalle J tel que $f(I) \subset J$. Soit $a \in I$.

Si u est dérivable en a et si v est dérivable en $f(a)$ alors $v \circ u$ est dérivable en a

$$(v \circ u)'(a) = u'(a) \times v'(u(a)) \quad ((v \circ u)' = u' \times v' \circ u)$$

Démonstration :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{v(u(x)) - v(u(a))}{x - a} = \frac{v(u(x)) - v(u(a))}{u(x) - u(a)} \times \frac{u(x) - u(a)}{x - a}$$

u continue en a donc $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = u(a)$. Posons $u(a) = b$.

Comme $\lim_{X \rightarrow b} \frac{v(X) - v(b)}{X - b} = v'(b) = v'(u(a))$, on obtient la formule

Corollaire :

Si u est une fonction dérivable sur I, alors :

_ $\forall n \in \mathbb{N}$, u^n est dérivable sur I et $(u^n)' = u' \times nu^{n-1}$ (idem avec u^α avec $\alpha \in \mathbb{R}$ si $u(x) > 0 \forall x \in I$)

$$\text{En particulier : } (u^2)' = 2uu' \quad (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} \quad \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

_ $\exp(u)$ est dérivable sur I et $(\exp(u))' = u' \times \exp(u)$

_ si u ne s'annule pas sur I, $\ln(|u|)$ est dérivable sur I et $(\ln(|u|))' = \frac{u'}{u}$

Exemple : Soit $f(x) = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^3$ sur $]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$ $f(x) = u(x)^3$

f est dérivable comme composée de fonctions dérivables et $\forall x \neq -1$, $f'(x) = 3 \times u'(x) \times u(x)^2$

$$u'(x) = \frac{-(1+x) - (1-x)}{(1+x)^2} = \frac{-2}{(1+x)^2} \quad \text{donc } f'(x) = \frac{-6}{(1+x)^2} \times \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2$$

2.3 Dérivée d'une réciproque

Propriété :

Soit f une fonction bijective de I sur J . Soit g sa fonction réciproque.

Si f est dérivable sur I et si $\forall x \in I, f'(x) \neq 0$, alors g est dérivable sur J et

$$\forall y \in J, g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} \left(= \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \right)$$

Démonstration :

Soit $b \in J$. Posons $a = g(b)$ ($\Leftrightarrow b = f(a)$)

$$\frac{g(y) - g(b)}{y - b} = \frac{1}{\frac{y - b}{g(y) - g(b)}} = \frac{1}{\frac{f(g(y)) - f(a)}{g(y) - a}}$$

f est continue sur I , donc g est continue sur J donc $\lim_{y \rightarrow b} g(y) = g(b) = a$.

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a). \text{ Donc } \lim_{y \rightarrow b} \frac{g(y) - g(b)}{y - b} = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(g(b))}$$

Remarques :

Si on a $f(a) = b$

_ si $f'(a) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en b et $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$

_ Si $f'(a) = 0$ alors f^{-1} n'est pas dérivable en b . $C_{f^{-1}}$ admet une tangente verticale en b .

Exemples :

_ $\exp$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0; +\infty[$. De plus, $\forall x \in \mathbb{R}, \exp'(x) = \exp(x) \neq 0$. Donc la fonction réciproque, $\ln$, est dérivable sur $]0; +\infty[$, et $\forall x \in]0; +\infty[, \ln'(x) = \frac{1}{\exp(\ln(x))} = \frac{1}{x}$

_ $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x$ On suppose qu'on a montré que f bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$

Soit g son application réciproque.

$f'(x) = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$ donc f' s'annule en 1.

$f(1) = \frac{1}{3}$ donc g est dérivable sur $\mathbb{R} - \{1/3\}$ et $\forall y \in \mathbb{R} - \{1/3\}, g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} = \frac{1}{(g(y) - 1)^2}$

En $1/3$, C_g admet une tangente verticale.

3. Fonctions C^p , C^∞

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

- _ Si f est une fonction dérivable sur I et si f' est elle-même dérivable sur I , on dit que f est deux fois dérivable sur I , et la dérivée de f' , notée f'' ou $f^{(2)}$ est appelée dérivée d'ordre 2 de f .
- _ On peut définir de la même manière $f^{(3)}$, ..., $f^{(n)}$ De manière générale $f^{(n+1)} = f^{(n)'}.$

Exemple :

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 1 \quad f'(x) = 3x^2 + 6x - 2 \quad f''(x) = 6x + 6 \quad f^{(3)}(x) = 6 \quad f^{(4)}(x) = 0 \dots$$

Définition :

- _ Si f est continue sur I , on dit que f est C^0 sur I .
- _ Si f est dérivable sur I et si f' est continue sur I , alors on dit que f est de classe C^1 sur I .
- _ Si $n \in \mathbb{N}$, si f est n -fois dérivable sur I et si $f^{(n)}$ est continue sur I , on dit que f est de classe C^n sur I .
- _ si $\forall n \in \mathbb{N}$, f est de classe C^n , on dit que f est de classe C^∞ .

Propriété :

Les polynômes, la fonction $\exp$ sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, la fonction $\ln$ est C^∞ sur $]0; +\infty[$.

Propriété :

Soit n un entier naturel ou $+\infty$.

La somme, le produit, le quotient (s'il existe), la composée (si elle existe) de deux fonctions de classe C^n est une fonction de classe C^n .

Ex : la fonction $f(x) = x^2 \ln(x)$ est C^∞ sur $]0; +\infty[$ comme produit de fonctions C^∞