1. Notion d'application

1.1 Définitions

Définition :
Soient A et B des ensembles. Une application f de A vers B associe à tout élément x de A un unique élément y de B. On note y = f(x).
y es l'image de x par f. x est un antécédent de y par f.
A est appelé l'ensemble de définition de l'application f. B est appelé l'ensemble image.

_ si X est une partie de A, on appelle image de X par f, notée f(X), l'ensemble des images des éléments de x. $f(X) = \{f(x), x \in X\}$
f(X) est un sous-ensemble de B.
_ si Y est une partie de B, on appelle image réciproque de Y par f, notée $f^{-1}(Y)$, l'ensemble des antécédents des éléments de Y. $f^{-1}(Y) = \{x \in A \mid f(x) \in B\}$
$f^{-1}(Y)$ est un sous-ensemble de A.

Exemple :
_ $f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \end{cases}$ l'ensemble de définition et l'ensemble image sont $\mathbb{R}$.
$f(\mathbb{R}) = [0 ; +\infty[$, $f([0 ;2]) = [0 ;4]$ $f^{-1}([0;1]) = [-1;1]$.

Définition :
Soit A et B deux ensembles et A' une partie de A.
Si f est une application de A vers B, g une application de A' vers B, et si $\forall x \in A'$, g(x) = f(x), on dit que g est la restriction de f à A', ou que f est un prolongement de g sur A.

Définition : Soit E un ensemble. On appelle application identité de E l'application :
$id_E : \begin{cases} E \longrightarrow E \\ x \longmapsto x \end{cases}$

Définition:
Soient A, B et C trois ensembles.
Soit f est une application de A vers B et g est une application de B vers C.
L'application, notée $g \circ f$, $\begin{cases} A \longrightarrow C \\ x \longmapsto g(f(x)) \end{cases}$ est appelée composée de f suivie de g.

Remarque :
Soit f une application de A vers B. Alors $f \circ id_A = f$ et $id_B \circ f = f$.

1.2 Injectivité - Surjectivité – Bijectivité

Définition :
Soit f une application de l'ensemble A vers l'ensemble B.
_ on dit que f est injective si deux éléments distincts de A ont toujours des images distinctes dans B. (donc f est injective si tout élément de B admet au plus un antécédent par f).
$\forall (x, x') \in A^2, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$.

_ on dit que f est surjective si f(X) = B, c'est-à-dire si tout élément de B admet au moins un antécédent par f.
$\forall y \in B, \exists x \in A$, tel que $f(x) = y$.
_ on dit que f est bijective si f est injective et surjective (c'est-à-dire tout élément de B admet exactement un antécédent par f).

Remarques :
_ f injective signifie que $\forall y \in B$, l'équation $f(x) = y$ admet au plus une solution.
_ f surjective signifie que $\forall y \in B$, l'équation $f(x) = y$ admet au moins une solution.
_ f bijective signifie que $\forall y \in B$, l'équation $f(x) = y$ admet exactement une solution.

Exemples :
1) patates
2) Soit f $\begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 + 1 \end{cases}$ $f(-1) = 2$ $f(1) = 2$ donc 2 a deux antécédents. Donc f n'est pas injective.
f surjective ? 0 n'a pas d'antécédent ($x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1$ impossible). Donc f n'est pas surjective.
3) Soit g $\begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 2x - 1 \end{cases}$
_ f injective ? $f(x) = f(x') \Leftrightarrow 2x - 1 = 2x' - 1 \Leftrightarrow 2x = 2x' \Leftrightarrow x = x'$ donc f injective
si $y \in \mathbb{R}$, on résout l'équation $g(x) = y$ $2x - 1 = y$ $2x = y + 1$ $x = \dfrac{y+1}{2}$ L'équation a toujours une et une seule solution.
Donc g est bijective.

1.3 Application réciproque

Définition
Soit A et B deux ensembles.
Soit f une application de A vers B. On dit que f admet une application réciproque s'il existe une application f^{-1} de B vers A telle que : $\forall x \in A, \forall y \in B, y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$.

Propriété :
Si f $A \longrightarrow B$ admet une application réciproque f^{-1}, alors
$\forall x \in A, f^{-1}(f(x)) = x$ et $\forall y \in B, f(f^{-1}(y)) = y$
$(f^{-1} \circ f = Id_A)$ $(f \circ f^{-1} = Id_B)$

Démonstration :
Posons $y = f(x)$ donc $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f^{-1}(f(x) = x$
Posons $x = f^{-1}(y)$ donc $y = f(x) = f(f^{-1}(y))$/

Propriété : Soit f une fonction de A vers B. Alors f admet une application réciproque si et seulement si f est bijective.

Remarque : Pour chercher l'expression de la fonction f^{-1}, on résout l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x.

Exemples :

1) Patates

2) Soit f $\begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 2x - 1 \end{cases}$

On a vu que f est bijective, donc f admet une réciproque.

Der plus, $y = f(x) \Leftrightarrow y = 2x - 1 \Leftrightarrow x = \frac{y+1}{2}$. Donc $f^{-1} \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ y \longmapsto \frac{y+1}{2} \end{cases}$

3) la fonction carré : $\begin{cases} [0, +\infty[\longrightarrow [0,+\infty[\\ x \longmapsto x^2 \end{cases}$ est bijective. Son application réciproque est la fonction racine carrée. $(x^2 = y \Leftrightarrow x = \sqrt{y})$

_ la fonction exp : $\begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow]0, +\infty[\\ x \longmapsto e^x \end{cases}$ est bijective. Son application réciproque est la fonction ln. $(y = e^x \Leftrightarrow x = \ln(y))$

Remarques : _ Si f est bijective, alors $(f^{-1})^{-1} = f$.

_ si $f : A \longrightarrow B$ et $g : B \longrightarrow C$ sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

2. Généralités sur les fonctions numériques

Dans toute cette partie, les fonctions sont définies sur une partie de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Définition :

Soit f une fonction définie sur un ensemble $D \subset \mathbb{R}$.

On appelle courbe de f l'ensemble des points M du plan de coordonnées $(x,f(x))$, où $x \in D$.

2.1 Restrictions du domaine d'étude

Définition :

Soit f une fonction définie sur un ensemble $D \subset \mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0.

_ on dit que f est paire si et seulement si $\forall x \in D, f(-x) = f(x)$

_ on dit que f est impaire si et seulement si $\forall x \in D, f(-x) = - f(x)$.

Propriété :

Si f est paire, la droite d'équation $x = 0$ (axe des ordonnées) est un axe de symétrie de la courbe C_f.

Si f est impaire, le point $O(0 ;0)$ est un centre de symétrie de la courbe C_f.

Exemples :

_ la fonction carré, la fonction valeur absolue, de manière générale $f(x) = x^n$ avec n pair, sont paires.

_ la fonction inverse, la fonction cube et de manière générale $f(x) = x^n$ avec n impaire, sont impaires.

_ soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x}{3 + x^2}$

$f(-x) = \frac{-x}{3 + (-x)^2} = - \frac{x}{3 + x^2} = - f(x)$. Donc f est impaire.

Définition : Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et $T > 0$. On dit que f est périodique de période T si $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x + T) = f(x)$.

Remarque :
Pour tracer la courbe représentative d'une fonction périodique, on trace la courbe sur un intervalle d'amplitude T, puis on reproduit le graphe par translation.

2.2 Variations et bornes

Définition :
Soit f définie sur un <u>intervalle</u> I.
On dit que f est croissante sur I si $\forall (x_1, x_2) \in I^2$, $x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.
On dit que f est décroissante sur I si $\forall (x_1, x_2) \in I^2$, $x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.

Définition :
Soit f une fonction définie sur un ensemble D.
_ On dit que f atteint un maximum en x_0 si $\forall x \in D$, $f(x) \leq f(x_0)$.
minimum en x_0, $f(x) \geq f(x_0)$.
_ On dit que le réel M est un majorant de la fonction f si $\forall x \in D$, $f(x) \leq M$.
m minorant $f(x) \geq m$.
_ Une fonction à la fois majorée et minorée est dite bornée.

Ex : $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq 0$ donc 0 est un minorant de la fonction exp sur $\mathbb{R}$, mais n'est pas un minimum (car n'est pas atteint).

Propriété : Limite d'une fonction monotone
Soit f une fonction définie sur un intervalle [a ;b[.
Si f est croissante et majorée, alors f admet une limite finie en b.
Si f est croissante et non majorée, alors f a pour limite $+\infty$ en b.

Remarque : il existe des propriétés analogues pour une fonction décroissante et minorée ou sur un intervalle du type]a ;b].

3. Continuité d'une fonction

3.1 Opérations sur les fonctions continues

Rappel : Soit f définie sur un intervalle I et $x_0 \in$ I. f est continue en x_0 si $\lim\limits_{x \to x0} f(x) = f(x_0)$.

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
Si f est continue en tout point de I, on dit que f est continue sur I.

Propriété :
Les fonctions constantes, affines, polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$.
exp est continue sur $\mathbb{R}$, ln est continue sur $]0; +\infty[$, $x \longmapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0; +\infty[$, $x \longmapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Propriété : (continuité et opérations)
Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I, et $\lambda \in \mathbb{R}$.
_ si f est continue sur I, alors λf est continue sur I.
_ si f et g sont continues sur I, alors f + g et fg sont continues sur I.
_ si f et g sont continues sur I, et si g ne s'annule pas sur I, alors $\frac{f}{g}$ est continue sur I.

Ex : Soit $f(x) = \frac{(2x^2 - 1 + e^x)}{\ln(x)}$ (sur $]1; +\infty[$ le numérateur est continu, comme somme de fonctions continues. f est continue, car quotient de fonctions continues.

Propriété : (continuité et composée)
Soit f une fonction définie sur un intervalle I, g une fonction définie sur un intervalle J tel que $f(I) \subset J$.
Si f est continue sur I et si g est continue sur J, alors $g \circ f$ est continue sur I.

Exemple :
$f(x) = e^{1/1 - x2}$ sur]-1;1 [$x \longmapsto \frac{1}{1 - x^2}$ est continue $x \longmapsto e^x$ est continue, donc f est continue comme composée de fonctions continues.

Remarque :
Si f est définie par différentes expressions, on étudie la continuité de f sur les intervalles <u>ouverts aux points de raccordement</u>, et <u>à part les points de raccordement</u>.

Exemple :
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = x\ln(x) \text{ sur }]0, +\infty[\\ f(x) = 0 \text{ sur }]-\infty,0] \end{cases}$.
_ sur $]-\infty;0[$, f est constante, donc continue
_ sur $]0; +\infty[$, f est continue car produit de fonctions continues
_ en 0 : $\lim\limits_{x \to 0,\, x > 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0,\, x > 0} x\ln(x) = 0$ (croissances comparées)
$\lim\limits_{x \to 0,\, x \leq 0} f(x) = 0$ donc f est continue en 0.
Donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

3.2 Propriétés des fonctions continues

Remarques :
_ On appelle segment un intervalle du type I = [a;b] avec $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$.
_ Le "théorème des valeurs intermédiaires" vu en Terminale n'est pas ce qu'on appellera à présent le théorème des valeurs intermédiaires.

Théorème des valeurs intermédiaires :
L'image d'un segment par une application continue est un segment.
L'image d'un intervalle par une application continue est un intervalle.

Corollaire :
Toute fonction continue sur un segment y admet un maximum et un minimum.

Remarque : Le TVI signifie que si f est continue sur un intervalle [a;b], alors tout réel y compris entre deux images admet au moins un antécédent. ($\Leftrightarrow$ l'équation f(x) = y admet au moins une solution).

4. Fonctions continues monotones

4.1 Image par une fonction continue monotone

Propriété :
Soit f une fonction continue sur [a;b].
_ si f est croissante sur [a;b], alors f([a;b]) = [f(a) ; f(b)]
_ si f est décroissante sur [a;b], alors f([a;b]) = [f(b) ; f(a)]
Soit f une fonction continue sur]a;b[(a, b réels ou $+\infty$ ou $-\infty$)
_ si f est croissante sur [a;b], alors f(]a;b[) = $\left]\lim\limits_{x \to a} f(x); \lim\limits_{x \to b} f(x)\right[$
_ si f est décroissante sur [a;b], alors f(]a;b[) = $\left]\lim\limits_{x \to b} f(x); \lim\limits_{x \to a} f(x)\right[$
(De même pour des intervalles du type [a;b[ou]a;b[.)

Exemple :
$f \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \end{cases}$ f est continue sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

$f([0; +\infty[) = [0; +\infty[$ $f(]-\infty;0]) = [0; +\infty[$ $f([-2;-1[) =]1;4]$
$f(]-2;1]) = [0;4[$. ($\neq [1;4[$!!!)

4.2 Théorème de la bijection

Théorème de la bijection : (1ère version)
Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I.
Alors f réalise une bijection de I vers f(I)

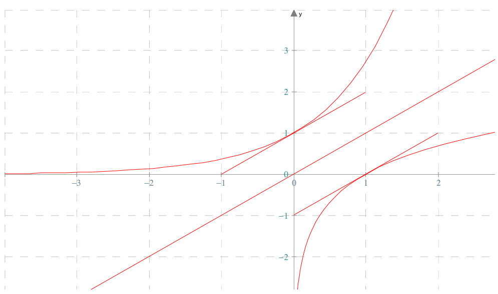
Exemple :
Soit $f(x) = 3e^{2x} - 4$ sur $\mathbb{R}$.
_ f est continue sur $\mathbb{R}$
_ $f'(x) = 6^{e2x} > 0$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
_ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -4$. Donc $f(\mathbb{R}) =]-4; +\infty[$
Donc f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-4; +\infty[$.

Propriété :
Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I.
Alors elle admet une application réciproque f^{-1}, qui est continue sur f(I), strictement monotone sur f(I), de même sens de variation que f.
De plus la courbe représentative de f^{-1} et la courbe représentative de f sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Remarque : si a et b sont finis ou infinis, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b \Leftrightarrow \lim\limits_{y \to b} f^{-1}(y) = a$.

Exemple :
La fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ donc exp réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0; +\infty[$.
Sa fonction réciproque, ln, est donc strictement croissante sur $]0; +\infty[$.
$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ donc $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$

Courbe :



Théorème de la bijection : (2 ème version)
Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors $\forall y_0 \in f(I)$, l'équation $f(x) = y_0$ admet une et une seule solution $x_0 \in I$.

Remarques :
_ Il faut bien vérifier que $y_0 \in f(I)$!
_ on a donc $f(x_0) = y_0$ (c'est-à-dire $x_0 = f^{-1}(y_0)$, puisque f est bijective et admet une application réciproque)

Exemple : Soit $f(x) = e^x + x - 2$ sur $[0; +\infty[$. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution x_0 sur $[0; +\infty[$. Montrer que $x_0 < 2$.
_ $f'(x) = e^x + 1 > 0$ donc f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.
$f(0) = -1$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ donc $f(I) = [-1; +\infty[$
$0 \in [-1; +\infty[$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution x_0 sur $[0; +\infty[$.
_ $f(x_0) = 0$ $f(2) = e^2 > 0$ donc $f(x_0) < f(2)$. f est croissante donc $x_0 < 2$.

4.3 Application aux suites implicites

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit f_n une fonction définie sur un intervalle I.
Dans certains exercices, on va montrer, grâce au théorème de la bijection) que $\forall\ n \in \mathbb{N}$, l'équation $f_n(x) = 0$ (ou …) admet une solution unique qu'on notera x_n.
On définit ainsi une suite de manière implicite : on ne connaît pas l'expression de x_n, on sait seulement que $f_n(x_n) = 0$. On cherche pourtant à étudier cette suite (variations, bornes, limite, équivalent…).

_ la seule chose qu'on sait sur x_n, c'est que : $\underline{f_n(x_n) = 0}$

_ pour comparer x_n avec un nombre, il faut souvent comparer les images par f_n et utiliser le sens de variation de f_n. (attention à ne pas confondre le sens de variation de f et celui de (x_n) !).
_ pour étudier les variations de x_n, on étudie souvent le signe de $f_{n+1}(x) – f_n(x)$, puis on compare $f_{n+1}(x_n)$ et $f_{n+1}(x_{n+1})$.

Exemple :
Soit $n \geq 1$ et f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = nx – e^{-x}$
1) Montrer que $\forall\ n \geq 1$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution x_n.
2) Montrer que $\forall\ n \geq 1$, $0 \leq x_n \leq \frac{1}{n}$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n$.
3) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, étudier le signe de $f_{n+1}(x) – f_n(x)$. En déduire que (x_n) est décroissante.
4) Montrer que $\forall\ n \geq 1$, $nx_n = e^{-xn}$. En déduire un équivalent de x_n.

1) $\forall\ n \geq 1$, $f_n'(x) = n + e^{-x} > 0$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$
$\lim\limits_{x \to -\infty} -e^{-x} = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f_n(x) = -\infty$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f_n(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

f_n est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et $0 \in f_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, donc d'après le théorème de la bijection, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution $x_n \in \mathbb{R}$.
2) $f_n(0) = -1 < 0$ $\quad f_n(x_n) = 0$ $\quad f_n(1/n) = 1 – e^{-1/n}$ $\quad -\frac{1}{n} < 0$ donc $e^{-1/n} < 1$ donc $1 – e^{-1/n} > 0$

Donc $f_n(0) \leq f_n(x_n) \leq f_n(1/n)$ $\quad f_n$ est croissante donc $0 \leq x_n \leq \frac{1}{n}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$, donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 0$.
3) $\forall\ x \in \mathbb{R}$ $f_{n+1}(x) – f_n(x) = (n+1)e^{x} – e^{-x} – (nx – e^{-x}) = x$
donc $f_{n+1}(x_n) – f_n(x_n) = x_n \geq 0$ $\quad f_{n+1}(x_n) \geq 0$ or $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$
Donc $f_{n+1}(x_n) \geq f_{n+1}(x_{n+1})$ $\quad f_{n+1}$ est croissante donc $x_n \geq x_{n+1}$
Donc (x_n) est décroissante.
4) $f_n(x_n) = 0 \Leftrightarrow nx_n – e^{-xn} = 0 \Leftrightarrow nx_n = e^{-xn}$ $\quad \lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{-xn} = 1$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{x_n}{\frac{1}{n}} = 1$ donc $x_n \sim_{+\infty} \frac{1}{n}$

4.4 Théorème du point fixe

Rappel : Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On appelle point fixe de f tout $x \in I$ tel que $f(x) = x$.

Théorème du point fixe : Soit f une fonction continue sur un intervalle I et telle que $f(I) \subset I$.

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

Si (u_n) converge vers un réel L, alors L est un point fixe de f. ($\Leftrightarrow L = f(L)$)

Remarque :
Pour montrer l'existence d'un point fixe d'une fonction f, il faut en général étudier la fonction $g(x) = f(x) - x$ et étudier (grâce au théorème de la bijection) les solutions de l'équation $g(x) = 0$. ($f(x) = x \Leftrightarrow f(x) - x = 0$.)

Exemple : Soit $f(x) = \ln(x) + 2$ sur $[1; +\infty[$. Montrer que f admet un point fixe.

Posons $g(x) = f(x) - x = \ln(x) + 2 - x$ $g'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x} \leq 0$ sur $[1; +\infty[$

$g(1) = 1$ $\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} -x = -\infty$.

g est continue et strictement décroissante sur $[1; +\infty[$, et $0 \in\ ]-\infty;1]$, donc l'équation $g(x) = 0$ ($\Leftrightarrow f(x) = x$) admet une unique solution $\alpha \in [1; +\infty[$

Donc f admet un unique point fixe sur $[1; +\infty[$.