Chapitre 11 : Etude locale d'une fonction

1) Limite et continuité d’une fonction en un point

1.1 Limite finie / Continuité

Définition : Soit I un intervalle et x_0 un élément de I ou une extrémité de I.
Soit f une fonction définie sur I. Soit L un nombre réel.
_ On dit que f admet L pour limite en x_0 si pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$ il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in I \cap]x_0 - \alpha ; x_0 + \alpha[$, $|f(x) - L| \leq \varepsilon$
Dans ce cas, on note $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$.
_ On dit que la limite à gauche de f en x_0 est L si pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$ il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in I \cap]x_0 - \alpha ; x_0]$, $|f(x) - L| \leq \varepsilon$
On note $\lim\limits_{x \to x_0,\, x \leq x_0} f(x) = L$. (ou $\lim\limits_{x \to x_0}{}_g f(x) = L$)
_ On définit de même $\lim\limits_{x \to x_0,\, x \geq x_0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x0,\, x < x0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x0,\, x > x0} f(x)$

Remarques :
_ L’intervalle $]x_0 - \alpha ; x_0 + \alpha[$ est un intervalle ouvert qui contient x_0. On l’appelle voisinage de x_0.
_ si $x_0 \in I$ et si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existe, alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ (de même pour $\lim\limits_{x \to x_0,\, x \leq x_0} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to x_0,\, x \geq x_0} f(x)$).

Définition :
Soit I un intervalle et x_0 un élément de I. Soit f une fonction définie sur I.
Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existe et vaut $f(x_0)$, on dit que f est continue en x_0.
Si $\lim\limits_{x \to x_0,\, x \leq x_0} f(x)$ existe et vaut $f(x_0)$, on dit que f est continue à gauche en x_0.
De même pour la continuité à droite.

A retenir : Comment montrer que f est continue en x_0 ?
_ si f est définie à gauche et à droite de x_0, il faut montrer que :
$$\lim\limits_{x \to x0,\, x < x0} f(x) = \lim\limits_{x \to x0,\, x > x0} f(x) = f(x_0)$$
_ si f n'est définie qu'à droite de x_0, il faut montrer que :
$$\lim\limits_{x \to x0,\, x > x0} f(x) = f(x_0)$$
_ si f n'est définie qu'à gauche de x_0, il faut montrer que :
$$\lim\limits_{x \to x0,\, x < x0} f(x) = f(x_0)$$

Remarques :
_ les problèmes de continuité se posent surtout lors de "recollement" de fonctions en un point : il s'agit de vérifier que les différents "morceaux" se "recollent" .
_ Si f est continue à gauche et à droite en x_0, alors elle est continue en x_0.

Exemples :

1) Graphes : f^o continue à g, pas à d   à d, pas à g., continue continue ni à g. ni à d.

2) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = 0 \text{ si } x \leq 1 \\ f(x) = (x-1)^2 \text{ si } x > 1 \end{cases}$

f est-elle continue en 1 ?

$\lim\limits_{x \to 1,\, x \leq 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1,\, x \leq 1} 0 = 0$ $\lim\limits_{x \to 1,\, x > 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1,\, x > 1} x^2 = 0$

Donc f est continue en 1.

3) f définie sur [0; + ∞[par : $\begin{cases} f(x) = e^{-1/x2} \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$ f est-elle continue en 0 ?

$\lim\limits_{x \to 0} - 1/x^2 = - \infty$ donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} e^{-1/x2} = 0 = f(0)$ donc f est continue en 0.

Propriété

Soit I un intervalle et $x_0 \in$ I. Soit f une fonction définie sur I – $\{x_0\}$.

Si f admet une limite réelle L en x_0; alors si on pose $f(x_0) = L$, f est définie sur I et est continue en x_0.

On dit qu'on a prolongé f par continuité en x_0.

Exemple :

Soit f la fonction définie sur]0 ; + ∞[par : f(x) = 2 + xln(x).

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 2 + 0 = 2$ (par croissances comparées).

Si on pose en plus f(0) = 2, f devient : $\begin{cases} f(x) = 2 + x\ln(x) \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 2 \end{cases}$ et f est continue en 0.

Propriété : A retenir !

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

Ces deux fonctions sont donc prolongeables par continuité en 0, en posant f(0) = 1.

Ces deux limites seront démontrées dans le chapitre sur les fonctions exponentielles et logarithmes.

Ex : Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - 1}{5x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - 1}{2x} \times \dfrac{5x}{2x} = \dfrac{5}{2}$

1.2 Limite infinie en un point

Définition :

Soit I un intervalle, x_0 un élément de I ou une extrémité de I.

Soit f une fonction définie sur I (sauf x_0).

On dit que la limite de f en x_0 est + ∞ (respectivement - ∞) si pour tout nombre réel B il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in I \cap]x_0 - \alpha ; x_0 + \alpha[$, $f(x) \geq B$ (respectivement $f(x) \leq B$)

Dans ce cas, on note $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = + \infty$ (respectivement - ∞)

La définition est analogue dans le cas d'une limite à gauche et d'une limite à droite.

Exemples : (cf cours de Terminale) : $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = - \infty$

$\lim\limits_{x \to a}{}_g \dfrac{1}{x-a} = - \infty$ $\lim\limits_{x \to a}{}_d \dfrac{1}{x-a} = + \infty$

1.3 Limite à l'infini

Définition :
Soit f définie sur un intervalle du type $I = [a ;+\infty[$,
_ Soit L un réel. Alors on dit que la limite de f en $+\infty$ est L si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \geq A$, $|f(x) - L| \leq \varepsilon$
_ On dit que la limite de f en $+\infty$ est $+\infty$ si pour tout $B \in \mathbb{R}$, il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \geq A$, $f(x) \geq B$
_ On dit que la limite de f en $+\infty$ est $-\infty$ si pour tout $B \in \mathbb{R}$, il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \geq A$, $f(x) \leq B$.

Les définitions sont identiques pour la limite en $-\infty$ pour une fonction définie sur un intervalle du type $]-\infty ;a]$ et en remplaçant « pour tout $x \geq A$ » par « pour tout $x \leq A$ ».

Exemples :
$\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = \begin{cases} +\infty \text{ si } \alpha > 0 \\ 0 \text{ si } \alpha < 0 \end{cases}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$

2. Opérations sur les limites

2.1 Opérations arithmétiques et limites

Les règles d'opérations sur les limites sont les mêmes que pour les suites.

Il y a 4 formes indéterminées :
« $+\infty$ » + « $-\infty$ » « 0 » $\times$ « ∞ » « $\frac{0}{0}$ » et « $\frac{\infty}{\infty}$ »

Pour lever une indéterminée, voir le chapitre sur les suites.

Si le dénominateur tend vers 0, il faut étudier le signe du dénominateur (en s'aidant s'il le faut d'un tableau de signes) et le signe de la limite du numérateur :
Ex : $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 20}{3 - x}$
$\lim\limits_{x \to 3} x^2 + 2x - 20 = -5 < 0$
$\lim\limits_{x \to 3}{}_g\, 3 - x = 0^+$ donc $\lim\limits_{x \to 3}{}_g\, \dfrac{x^2 + 2x - 20}{3 - x} = -\infty$
$\lim\limits_{x \to 3}{}_d\, 3 - x = 0^-$ donc $\lim\limits_{x \to 3}{}_d\, \dfrac{x^2 + 2x - 20}{3 - x} = +\infty$

2.2 Limite et composée

Propriété (Composition)
Soient x_0 , y_0, z_0 des nombres réels, ou + ∞ ou - ∞.
Soient f une fonction définie sur un voisinage de x_0, et g définie sur un voisinage de y_0.
Si $\lim_{x \to x0} f(x) = y_0$ et si $\lim_{y \to y0} g(y) = z_0$ alors $\lim_{x \to x0} g(f(x)) = z_0$.

Exemple : $f(x) = e^{1/x-1}$ lim en 1 ?

$\lim_{x \to 1,\, x > 1} \frac{1}{x-1} = +\infty$ $\lim_{X \to +\infty} e^X = +\infty$ donc $\lim_{x \to 1,\, x > 1} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to 1,\, x < 1} \frac{1}{x-1} = -\infty$ $\lim_{X \to -\infty} e^X = 0$ donc $\lim_{x \to 1,\, x < 1} f(x) = 0$

2.3 Limites et inégalités

Dans cette partie x_0 désigne un réel, ou + ∞ ou - ∞.

Propriété :
Soit I un voisinage de x_0 et f, g deux fonctions définies sur $I - \{x_0\}$.
On suppose que pour tout $x \in I - \{x_0\}$, $f(x) \leq g(x)$.
_ si f et g admettent une limite finie en x_0, alors $\lim_{x \to x_0} f(x) \leq \lim_{x \to x_0} g(x)$.
_ si $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$
_ si $\lim_{x \to x_0} g(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

Propriété : Théorème d'encadrement (ou théorème des gendarmes)
Soit I un voisinage de x_0 et f, g, h trois fonctions définies sur $I - \{x_0\}$.
Si pour tout $x \in I \setminus \{x_0\}$ $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ et s'il existe un réel L tel que $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = L$, alors $\lim_{x \to x_0} g(x) = L$.

3. Comparaisons de fonctions

Dans toute cette partie, x_0 désigne un réel ou + ∞, ou - ∞.

3.1 Fonction négligeable / Fonctions équivalentes

Définition :
Soient f et g deux fonctions définies et non nulles sur un voisinage de x_0 :
_ On dit que f est équivalente à g en x_0 si $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ On note $f \sim_{x0} g$.
_ On dit que f est négligeable devant g (ou que g est prépondérante devant f) au voisinage de x_0 si $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. On note $f =_{x0} o(g)$.

Propriété : Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage de x_0.
Si $f(x) =_{x0} g(x) + o(g(x))$ alors $f(x) \sim_{x0} g(x)$

Comme pour les suites, la relation d'équivalence est compatible avec la multiplication, la division et la puissance, mais pas avec la somme et la différence.

Propriété : Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage de x_0.
Si $f(x) \sim_{x_0} g(x)$ et si $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L$ (fini ou infini), alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$

3.2 Exemples usuels

Propriété :
$\ln(1 + x) \sim_0 x$ et $e^x - 1 \sim_0 x$

Corollaire
Soit u une fonction définie sur un voisinage de x_0.
Si $\lim\limits_{x \to x0} u(x) = 0$ alors $e^{u(x)} - 1 \sim_{x0} u(x)$ et $\ln(1 + u(x)) \sim_{x0} u(x)$.

Exemple : Limite en 0 de $\dfrac{\ln(1 - x^2)}{2x^2}$?

$\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$ donc $\ln(1 - x^2) \sim - x^2$ $\quad \dfrac{\ln(1 - x^2)}{2x^2} \sim \dfrac{-x^2}{2x^2} \sim -\dfrac{1}{2}$ $\quad \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 - x^2)}{2x^2} = -\dfrac{1}{2}$

Propriété :
Un polynôme est équivalent à son monôme de plus haut degré <u>en + ∞ et en - ∞</u>.

Exemple :
Limite en + ∞ de $\dfrac{2 - x^3}{x^2 + x + 1} \sim -\dfrac{x^3}{x^2} \sim - x$. $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = + \infty$

Propriété (Croissances comparées) : Soient α et β des réels
1) si $\alpha < \beta$ alors $x^\alpha =_{+\infty} o(x^\beta)$
2) $x =_{+\infty} o(e^x)$ (c'est-à-dire $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$ ou $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = + \infty$)
$\ln(x) =_{+\infty} o(x)$ (c'est-à-dire $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$)
$\lim\limits_{x \to 0} x\ln(x) = 0 \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$
3) De manière générale, si $\alpha > 0$ et $\beta > 0$,
$x^\alpha =_{+\infty} o(e^{\beta x})$ $\quad \ln^\alpha(x) =_{+\infty} o(x^\beta)$ $\qquad \lim\limits_{x \to 0} x^\beta \ln^\alpha(x) = 0 \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} x^\alpha e^{\beta x} = 0$

Exemples :
1) $f(x) = x - 2\ln^3(x) \qquad \ln^3(x) =_{+\infty} o(x)$ donc $f(x) \sim_{+\infty} x$
2) $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-x}$? $\quad xe^{-x} = \dfrac{x}{e^x}$ Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-x} = 0$ par croissances comparées,

4. Comportement asymptotique (Branches infinies)

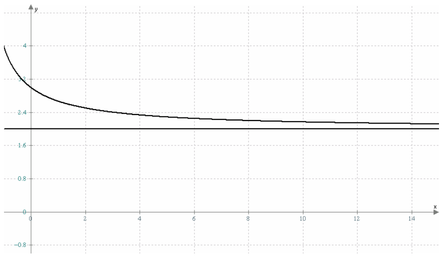
4.1 Limite en $x_0 \in \mathbb{R}$

Définition :
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Soit f une fonction définie sur un voisinage de x_0 (sauf en x_0).
Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, alors on dit que la droite d'équation $x = x_0$ est asymptote verticale à la courbe de f.

Exemple : $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{x-1} = \infty$ donc la droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à la courbe.

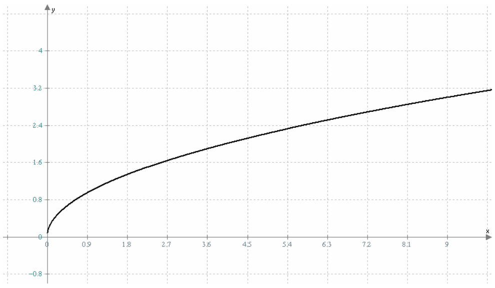
4.2 Limite en + ∞ ou - ∞

Définition :
Soit f une fonction définie sur un voisinage de + ∞.
Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$, avec $L \in \mathbb{R}$, on dit que la droite d'équation $y = L$ est asymptote verticale à C_f.

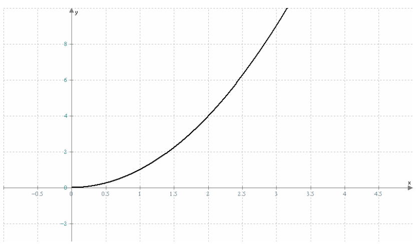


Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \infty$:

_ si $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, on dit que C_f admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses.

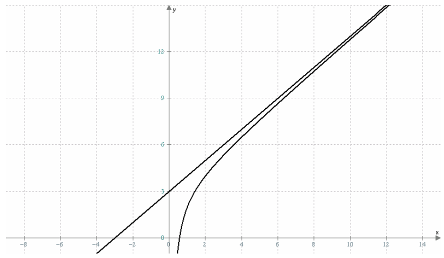


_ si $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty$, on dit que C_f admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

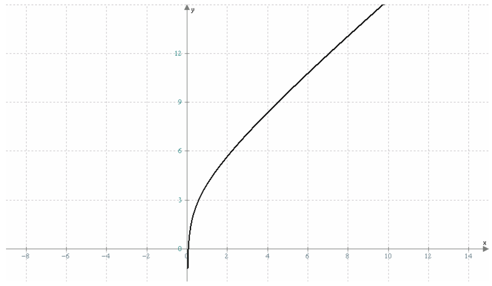


– si $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \neq 0$ (donc $f(x) \sim ax$) : on dit que C_f admet une direction asymptotique d'équation $y = ax$.

- si $\lim_{x \to +\infty} f(x) - ax = b$, $b \in \mathbb{R}$: C_f admet une A.O. d'équation $y = ax + b$



- si $\lim_{x \to +\infty} f(x) - ax = \infty$, C_f admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = ax$.



Remarque : La définition est la même pour $-\infty$.

Exemples :

- $f(x) = \frac{3x + 1}{x + 2} \sim_{+\infty} 3$ donc $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 3$: A.H. d'équation $y = 3$.

– $f(x) = e^x$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$: branche parabolique de direction l'axe des ordonnées

– $f(x) = \ln(x)$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$: branche parabolique de direction l'axe des abscisses.

– $f(x) = 2x + \ln(x)$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} 2 + \frac{\ln(x)}{x} = 2$

$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$: branche parabolique de direction $y = 2x$

– $f(x) = \frac{4x^2 - 3}{x + 1}$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{4x^2}{x} = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4x^2}{x^2} = 4$

$f(x) - 4x = \frac{4x^2 - 3}{x + 1} - \frac{4x(x + 1)}{x + 1} = \frac{-4x - 3}{x + 1}$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) - 4x = \lim_{x \to +\infty} \frac{-4x}{x} = -4.$

Donc la droite d'équation $y = 4x - 4$ est asymptote oblique à C_f.

Propriété :
Soit f une fonction définie sur un intervalle I, voisinage de $+\infty$.
_ s'il existe deux réels $a \neq 0$ et b tels que $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) - (ax + b) = 0$ alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à la courbe de f.
_ S'il existe deux réels a et b et une fonction g tels que :
$\begin{cases} \forall x \in I,\ f(x) = ax + b + g(x) \\ \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0 \end{cases}$ alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à C_f.

Exemple :
$f(x) = 3x - 1 + \dfrac{1}{2x-3}$.
$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{2x-3} = 0$ donc la droite d'équation $y = 3x - 1$ est A.O. à C_f.

Remarque : Avant de tracer une courbe, on trace toujours les asymptotes.