Chapitre 10 : Lois finies usuelles

1. Loi uniforme

Définition :
Soit X une VAR telle que $X(\Omega) = \{1,..,n\}$. (=[[1;n]])
On dit que X suit la loi uniforme sur $\{1,..,n\}$ si $\forall\, k \in \{1,..,n\}$, $P(X = k) = \frac{1}{n}$.
On note $X \to U(\,[[1;n]])$

Cas d'application :
Si X prend les valeurs de 1 et n de manière équiprobable, alors $X \to U(\,[[1,n]]\,)$.

Propriété :
Soit X une VAR qui suit la loi uniforme sur $\{1,..,n\}$. Alors $E(X) = \frac{n+1}{2}$ et $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$.

Démonstration :

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} kP(X = k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$$

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{n} k^2\, P(X = k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = \frac{2(n+1)(2n+1) - 3(n+1)^2}{12}$$

$$= \frac{(n+1)(4n+2-3n-3)}{12} = \frac{(n+1)(n-1)}{12} = \frac{n^2-1}{12}$$

Exemple :
On lance un dé équilibré et on note X le résultat.
Il y a équiprobabilité donc X suit la loi uniforme sur $\{1,\dots,6\}$.
Donc $\forall\, k \in \{1,..,6\}$ $P(X = k) = \frac{1}{6}$.

$$E(X) = \frac{6+1}{2} = \frac{7}{2} = 3{,}5 \quad V(X) = \frac{6^2-1}{12} = \frac{35}{12} \quad \sigma(X) = \sqrt{\frac{35}{12}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{35}{3}}$$

2. Loi de Bernoulli

Définition :
Soit X une V.A.R. telle que $X(\Omega) = \{0,1\}$.
Soit $p \in [0;1]$. On dit que X suit la loi de Bernoulli de paramètre p (notée B(1,p)) si

$$\begin{cases} P(X = 1) = p \\ P(X = 0) = 1 - p \end{cases}$$

On note souvent $q = 1 - p$.

Cas d'application :

Soit S un événement appelé "succès" de probabilité p. ($\overline{S}$ ="échec a pour probabilité 1-p)

Soit X la variable aléatoire définie par : $\begin{cases} X = 1 \text{ si S est réalisé} \\ X = 0 \text{ sinon} \end{cases}$

Alors X suit une loi de Bernoulli de paramètre p.

On dit que l'expérience aléatoire est une épreuve de Bernoulli.

Propriété :

Si $X \to B(1,p)$ alors $E(X) = p$ et $V(X) = p(1 - p) = pq$.

Démonstration :

$E(X) = 0\times(1 - p) + 1\times p = p$

$E(X^2) = 0\times(1 - p) + 1^2 \times p = p$ $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = p - p^2 = p(1 - p)$

Exemple :

On lance un dé équilibré. Soit X la VAR qui vaut 1 si obtient le numéro 6 et 0 sinon.

Obtenir 6 est une épreuve de Bernoulli de probabilité $\frac{1}{6}$.

Donc $X \to B(1,1/6)$. Donc $E(X) = \frac{1}{6}$ $V(X) = \frac{1}{6}\times\frac{5}{6} = \frac{5}{36}$ $\sigma(X) = \frac{\sqrt{5}}{6}$

3. Loi binomiale

Définition :

Soit X une VAR telle que $X(\Omega) = \{0,..,n\}$.

S'il existe $p \in [0;1]$ tel que $\forall\ k \in \{0,..,n\}$, $P(X = k) = \binom{n}{k}p^k(1 - p)^{n-k}$, alors on dit que X suit une loi binomiale de taille n et de paramètre p.

Remarques :

_ $\sum_{k=0}^{n} P(X = k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}p^k(1 - p)^{n-k} = (p + 1 - p)^n$ (formule du binôme de Newton)

$= 1^n = 1$: il s'agit bien d'une probabilité

_ pour n = 1, on trouve $P(X = 0) = \binom{1}{0}p^0(1 - p)^{1-0} = 1 - p$

$P(X = 1) = \binom{1}{1}p^1(1 - p)^{1-1} = p$ On retrouve la loi de Bernoulli de paramètre p. D'où la notation B(1,p).

Propriété :

Soit S le succès d'une épreuve de Bernoulli de paramètre p.

On effectue n fois et <u>de manière indépendante</u> cette épreuve.

Soit X le <u>nombre de succès</u> obtenus. Alors $X \to B(n,p)$.

Démonstration :

$X(\Omega) = \{0,..,n\}$. Si $k \in \{0,..,n\}$ $(X = k)$: k succès, n – k échecs.

Il y a $\binom{n}{k}$ possibilités d'obtenir k succès parmi n épreuves. Chacune de ces possibilités à la même probabilité.

$P(S_1 \cap S_2 \cap \ldots \cap S_k \cap \overline{S_{k+1}} \cap \ldots \cap \overline{S_n}) = p \times p \times \ldots \times p \times (1 - p) \times \ldots \times (1 - p)$ (car les événements sont indépendants) $= p^k (1 - p)^{n-k}$

Donc $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$

Propriété :
Soit X une VAR qui suit une loi binomiale $B(n,p)$.
Alors $E(X) = np$ et $V(X) = np(1 - p)$.

Démonstration pour l'espérance : (variance : démo vue en 2ème année)
Considérons que X est le nombre de succès lors de n épreuves de Bernoulli indépendantes.
Soient $X_1, \ldots, X_n$ les variables de Bernoulli liées à ces épreuves de Bernoulli.

$(X_i = \begin{cases} 1 \text{ si succès à la i ème épreuve} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

$X_1 + \ldots + X_n$ est le nombre de succès. Donc $X = X_1 + \ldots + X_n$.
Donc $E(X) = E(X_1) + \ldots + E(X_n) = p + \ldots. + p = np$

Exemple :
On lance 5 fois un dé équilibré. Soit X le nombre de 6 obtenus.
Obtenir 6 à un tirage est une épreuve de Bernoulli de probabilité $\frac{1}{6}$.
Les lancers sont des épreuves indépendantes et X est le nombre de succès.
Donc X suit la loi binomiale de paramètre $\frac{1}{6}$ et de taille 5.

Donc $\forall k \in \{0,\ldots,5\}$, $P(X = k) = \binom{5}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{5-k}$

$E(X) = 5\times\frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ $\qquad$ $V(X) = 5 \times \frac{1}{6} \times \left(1 - \frac{1}{6}\right) = \frac{25}{36}$

4. Loi hypergéométrique

Définition :
Soit n, N deux entiers tels que $n \leq N$ et $p \in \ ]0;1[$.
On dit que X suit la loi hypergéométrique de paramètre N, n, p, notée H(N,n,p) si pour tout k tel que $0 \leq k \leq pN$ et $0 \leq n - k \leq N - pN$, $P(X= k) = \dfrac{\binom{pN}{k}\binom{N - pN}{n - k}}{\binom{N}{n}}$.

Propriété :
Soit E un ensemble à N éléments dont une proportion p d'éléments de type A.
(les autres étant de type B).
On choisit n éléments distincts de E (tirages simultanés ou successifs sans remise).
Soit X le nombre d'éléments de type A choisis
Alors $X \longrightarrow H(N, n, p)$.

Démonstration :
Il y a donc pN éléments de type A et N – pN éléments de type B.
Valeurs prises par X :
Si on prend k éléments de type A, on prend n – k éléments de type B.
Donc il faut que $0 \leq k \leq pN$ et $0 \leq n - k \leq N - pN$
$\text{card}(\Omega) = \binom{N}{n}$
Pour ces valeurs de k, $P(X = k) = \dfrac{\binom{pN}{k}\binom{N - pN}{n - k}}{\binom{N}{n}}$ (on choisit k éléments de type A et n – k éléments de type B). Donc $X \longrightarrow H(N,n,p)$.

Remarques :
_ Autrement dit, s'il y a N_A éléments de type A et N_B éléments de type B, alors pour k tel que $0 \leq k \leq N_A$ et $0 \leq n - k \leq N_B$, $P(X= k) = \dfrac{\binom{N_A}{k}\binom{N_B}{n - k}}{\binom{N_A + N_B}{n}}$
_ Si les tirages étaient avec remise, on aurait $X \longrightarrow B(n,p)$ (donc ne dépendrait pas de N).

Propriété (admise) :
Si X suit la loi hypergéométrique H(N,n,p) alors E(X) = np.

Exemple :
Dans une urne, il y a 5 boules noires et 6 boules rouges.
On tire simultanément 8 boules de cette urne. Soit X le nombre de boules noires tirées.
Il y a une proportion de $\dfrac{5}{11}$ de boules noires dans l'urne. On tire 8 boules sans remise dans cette urne. Donc X suit la loi hypergéométrique (11,8,5/11).
$X(\Omega) = \{2,3,4,5\}$
$\forall k \in \{2,3,4,5\}$, $P(X = k) = \dfrac{\binom{5}{k}\binom{6}{8 - k}}{\binom{11}{8}}$ $\quad E(X) = 8 \times \dfrac{5}{11} = \dfrac{40}{11}$.

Conclusion : A retenir

Nom	Situation	$X(\Omega)$	$P(X = k)$	$E(X)$	$V(X)$
Uniforme $U([[1;n]])$	Equiprobabilité	$\{1, \dots, n\}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
Bernoulli $B(1,p)$	succès de probabilité p X = 1 si succès X = 0 sinon	$\{0,1\}$	$P(X=0) = 1 - p$ $P(X = 1) = p$	p	$p(1 - p)$
Binomiale $B(n,p)$	n épreuves de Bernoulli indépendantes X = nombre de succès	$\{0, \dots, n\}$	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1 - p)$
Hypergéométrique $H(N,n,p)$	n éléments distincts choisis dans N, dont pN de type A X = nombre d'éléments de type A choisis	$0 \leq k \leq Np$ $0 \leq n-k \leq N - Np$	$\frac{\binom{pN}{k}\binom{N-pN}{n-k}}{\binom{N}{k}}$	np	A calculer