

## Chapitre 1 : Egalités et inégalités

### 1. Règles sur les égalités

Attention à retenir toutes ces égalités dans les deux sens !

#### 1.1 Produits et quotients

Définition :

Développer, c'est transformer un produit (ou un quotient) en somme.

Factoriser, c'est transformer une somme en produit (ou quotient).

Développements à connaître :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

On verra cette année une formule générale pour  $(a + b)^n$

Méthodes pour factoriser :

1) Trouver un facteur commun : Ex :  $-3x^2 + 2x = x(-3x + 2)$

2) Reconnaître une égalité remarquable (souvent la troisième !) :

$$\text{Ex : } (x - 3)^2 - 4 = (x - 3)^2 - 2^2 = (x - 3 - 2)(x - 3 + 2) = (x - 5)(x - 1)$$

3) Avec des quotients : mettre sous le même dénominateur :

$$-2 + \frac{3}{x+1} = \frac{-2(x+1)}{x+1} + \frac{3}{x+1} = \frac{-2x+1}{x+1}$$

$$\text{Quotients : } \frac{a}{b} \times c = \frac{ac}{b} \quad \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc} \quad \frac{\frac{ac}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b}$$

Attention : \_ on ne peut pas diviser par 0 !

$$-\frac{a+c}{b+c} \text{ n'est pas égal à } \frac{a}{b} !!!$$

Pour simplifier une fraction, il faut d'abord factoriser numérateur et dénominateur par un

$$\text{même terme. Ex : } \frac{x^2 - 1}{x^2 - x} = \frac{(x-1)(x+1)}{x(x-1)} = \frac{x+1}{x}$$

#### 1.2 Puissances et racines

Définition : si  $a \in \mathbb{R}^{+*}$  et  $b \in \mathbb{R}$ ,  $a^b = e^{b \ln(a)}$

Propriétés :

$$\text{si } a > 0 \quad a^0 = 1 \quad a^1 = a \quad a^{-1} = \frac{1}{a} \quad a^b \times a^c = a^{b+c} \quad \frac{1}{a^c} = \left(\frac{1}{a}\right)^c = a^{-c} \quad \frac{a^b}{a^c} = a^{b-c} \quad (a^b)^c = a^{bc}$$

$$\text{si } a > 0 \text{ et } b > 0, \quad a^c \times b^c = (ab)^c \quad \frac{1}{b^c} = \left(\frac{1}{b}\right)^c \quad \frac{a^c}{b^c} = \left(\frac{a}{b}\right)^c$$

Attention : \_ on ne peut pas transformer  $a^c + b^c$  !!  
 $_ 2 \times 3^n \neq 6^n$  !!  $(-1)^n \neq -1^n$  !!

Remarque : Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a^{n+1} = a^n \times a$

Propriété :

Soit  $a \in \mathbb{R}^+$ . Alors

$$(\sqrt{a})^2 = a \quad \sqrt{a^2} = a \quad \sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab} \quad \text{si } b > 0, \quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

Attention : on ne peut pas transformer  $\sqrt{a+b}$  !

$$\sqrt{a^2} = -a \text{ si } a < 0$$

### 1.3 Fonctions exp et ln

Propriété :

Pour tout  $a \in \mathbb{R}$   $\ln(e^a) = a$

Pour tout  $a > 0$ ,  $e^{\ln(a)} = a$

Pour tous  $a, b \in \mathbb{R}$   $e^0 = 1$   $e^1 = e$   $e^a \times e^b = e^{a+b}$   $\frac{1}{e^b} = \left(\frac{1}{e}\right)^b = e^{-b}$   $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$   $(e^a)^b = e^{ab}$

Pour tous  $a, b > 0$   $\ln(1) = 0$   $\ln(e) = 1$

$$\ln(a) + \ln(b) = \ln(a \times b) \quad -\ln(b) = \ln\left(\frac{1}{b}\right) \quad \ln(a) - \ln(b) = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$\frac{1}{2} \ln(a) = \ln(\sqrt{a}) \quad b \ln(a) = \ln(a^b)$$

Attention, on ne peut pas transformer  $\ln(a+b)$  !

$\ln(x)$  n'existe que si  $x > 0$

## 2. Autour des inégalités

### 2.1 Règles sur les inégalités

Remarque générale

A partir d'une inégalité, pour obtenir une inégalité équivalente, il faut effectuer la **même opération mathématique** à gauche et à droite du signe d'inégalité.

Attention, "passer à gauche" ou "passer à droite" n'ont jamais été des opérations mathématiques

Propriété :

Ajouter (ou soustraire) un nombre aux deux membres d'une inégalité ne change pas le sens.

Multiplier (ou diviser) par un nombre strictement positif les deux membres ne change pas le sens.

Multiplier (ou diviser) par un nombre strictement négatif les deux membres change le sens.

Exemple : Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Montrer que  $x > 3 \Rightarrow -\frac{2x}{3} + 6 < 4$

$$x > 3 \Rightarrow \frac{2x}{3} > \frac{2 \times 3}{3} \quad -\frac{2x}{3} < -2 \quad -\frac{2x}{3} + 6 < -2 + 6 \quad -\frac{2x}{3} + 6 < 4$$

## 2.2 Inégalités et variations des fonctions

Définition :

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ .

On dit que  $f$  est croissante sur  $I$  si pour tous  $a \in I$  et  $b \in I$ ,  $a \leq b \Leftrightarrow f(a) \leq f(b)$

On dit que  $f$  est décroissante sur  $I$  si pour tous  $a \in I$  et  $b \in I$ ,  $a \leq b \Leftrightarrow f(a) \geq f(b)$ .

Rappels :

La fonction carré est décroissante sur  $] - \infty; 0]$  et croissante sur  $[0; + \infty[$ .

La fonction inverse est décroissante sur  $] - \infty; 0[$  et décroissante sur  $]0; + \infty[$

La fonction racine est croissante sur  $[0; + \infty[$

La fonction exp est croissante sur  $\mathbb{R}$ .

La fonction ln est croissante sur  $]0; + \infty[$ .

La fonction affine  $x \mapsto ax + b$  (où  $a \in \mathbb{R}$  et  $b \in \mathbb{R}$ ) est croissante si  $a > 0$ , décroissante si  $a < 0$  et constante si  $a = 0$ .

Exemple : Montrer que  $x \geq e \Rightarrow \frac{1}{\ln(x) + 3} \leq \frac{1}{4}$

$x \geq e \quad \ln(x) \geq \ln(e) \quad (\ln \uparrow) \quad \ln(x) + 3 \geq 4 \quad (>0) \quad \frac{1}{\ln(x) + 3} \leq \frac{1}{4}$  (fonction inv  $\downarrow$  sur  $]0; + \infty[$ )

Remarque : Dans une expression où la variable apparaît plus d'une fois, il est nécessaire d'étudier les variations de la fonction sous-jacente (ce qui est souvent déjà fait). Attention à bien vérifier l'intervalle.

Exemple :

On veut montrer que si  $x \geq 1$  alors  $\frac{x+1}{x+2} \geq \frac{2}{3}$

(Essai :  $x \geq 1 \Rightarrow x + 1 \geq 2$  et  $x + 2 \geq 3$ . Et alors ?)

Posons  $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$  sur  $[1; + \infty[$   $f'(x) = \frac{1(x+2) - 1(x+1)}{(x+2)^2} = \frac{1}{(x+2)^2} \geq 0$  donc  $f$  est croissante sur  $[1; + \infty[$ .

Donc  $x \geq 1$

$$f(x) \geq f(1) \quad (f \text{ croissante sur } [1; + \infty[) \quad f(x) \geq \frac{2}{3}.$$

## 2.3 Inégalités et signes

Pour montrer une inégalité, il est souvent utile de faire la différence des deux membres et d'étudier son signe.

Exemple : Montrer que  $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R} \quad ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$

$$\frac{a^2 + b^2}{2} - ab = \frac{a^2 + b^2 - 2ab}{2} = \frac{(a-b)^2}{2} \geq 0 \text{ donc } ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

Pour étudier le signe d'une expression, il est souvent utile d'utiliser un tableau de signes.

Attention, on peut faire le tableau de signes d'un produit ou d'un quotient, mais jamais d'une somme ! Il faut donc factoriser l'expression au maximum.

Signe d'une expression affine  $ax + b$  ( $a \neq 0$ ).

On détermine la valeur  $x_0$  où l'expression s'annule. On a alors :

x	$-\infty$	$x_0$	$+\infty$
$ax + b$	$-\text{signe}(a)$	0	$\text{signe}(a)$

Exemple :  $f(x) = -\frac{x}{2} + 1$      $-\frac{x}{2} + 1 = 0$      $-\frac{x}{2} = -1$      $x = 2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$-\frac{x}{2} + 1$	+	0	-

\_ signe d'un polynôme du second degré : voir chapitre suivant

\_ Pour déterminer le signe d'une expression contenant  $\ln$  ou  $\exp$ , il est souvent nécessaire de résoudre une inégalité (attention l'égalité ne suffit pas)

Exemple :

signe de  $2 - \ln(x)$  sur  $]0; +\infty[$  :  $2 - \ln(x) \geq 0 \Leftrightarrow -\ln(x) \geq -2 \Leftrightarrow \ln(x) \leq 2 \Leftrightarrow x \leq e^2$

Donc

x	0	$e^2$	$+\infty$
$2 - \ln(x)$	+	0	-

\_ enfin, pour déterminer montrer une inégalité plus complexe du type : montrer que pour tout  $x \in I$ ,  $f(x) \geq 0$ , il peut être utile d'étudier les variations de  $f$  (à l'aide de sa dérivée), puis d'en déduire l'inégalité.

Exemple : Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x \Leftrightarrow e^x - 1 - x \geq 0$

Posons  $f(x) = e^x - 1 - x$  alors  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $f'(x) = e^x - 1$

$e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq \ln(1) \Leftrightarrow x \geq 0$      $f(0) = e^0 - 1 - 0 = 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$	
$f'(x) = e^x - 1$		-	0	+
$f(x)$				

Le minimum de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  est 0 donc pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) \geq 0$  c'est-à-dire  $e^x \geq 1 + x$