

ECE1 : Concours blanc n°1

Vendredi 17 Juin 2011

*Les calculatrices et téléphones portables sont interdits.
Le barème est donné à titre indicatif.*

Exercice 1 – EML 2011 (4 points)

On considère l'application $f :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x) = (x + \ln x) e^{x-1}$:

1. Montrer que f est dérivable sur $]0; +\infty[$. On note f' sa fonction dérivée.

Pour tout $x \in]0; +\infty[$, calculer $f'(x)$.

2. Établir : $\forall x \in]0; +\infty[, \ln x + \frac{1}{x} > 0$

3. En déduire : $\forall x \in]0; +\infty[; x + \ln x + 1 + \frac{1}{x} > 0$.

En déduire le sens de variation de f .

Dresser le tableau de variation de f , comprenant la limite de f en 0 et la limite de f en $+\infty$.

Calculer $f(1)$ et $f'(1)$.

4. Préciser la nature des branches infinies de la courbe représentative C de f dans un repère du plan.

5. Tracer l'allure de C . On précisera la tangente au point d'abscisse 1.

Il n'est demandé ni l'étude de la convexité, ni la recherche d'éventuels points d'inflexion.

6. On considère la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
Écrire un programme en Turbo-Pascal qui calcule et affiche le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geq 10^{20}$.

Exercice 2 – ESC 97 (3,5 points)

Soit n un entier naturel non nul. On pose : $I_n = \int_1^e x^2 \ln(x)^n dx$.

1. Calculer I_1 .

2. a) Montrer que pour tout $x \in [1, e]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(x)^{n+1} \leq \ln(x)^n$.

En déduire le sens de variation de la suite $(I_n)_{n \geq 1}$.

b) Montrer que la suite $(I_n)_{n \geq 1}$ est convergente.

c) Montrer que pour tout $x \in [1, e]$, $0 \leq \ln(x) \leq \frac{x}{e}$.

d) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

3. a) Montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 1$: $I_{n+1} = \frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3} I_n$

b) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot I_n$ et un équivalent de I_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 3 – d'après EML 2008 (5 points)

On considère les matrices carrées d'ordre trois suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Partie I : Réduction simultanée de A et B

1. a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Déterminer pour quelles valeurs de λ le système

$$(S_\lambda) : \begin{cases} (1 - \lambda)x + y + z = 0 \\ -\lambda y - z = 0 \\ -2x - 2y + (-1 - \lambda)z = 0 \end{cases} \text{ n'est pas un système de Cramer.}$$

b) Pour chacune de ces valeurs, déterminer une base de l'ensemble des solutions.

2. On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1} .

On admet dans la suite que $A = P D P^{-1}$.

3. Calculer la matrice $C = P^{-1} B P$ et vérifier que C est diagonale.

Partie II : Étude d'un endomorphisme d'un espace de matrices

On note \mathcal{E} l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre trois, et on considère l'application $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ qui, à toute matrice M carrée d'ordre trois, associe $f(M) = AM - MB$:

1. Vérifier que f est un endomorphisme de \mathcal{E} .

2. Soit $M \in \mathcal{E}$. On note $N = P^{-1} M P$, où P est définie en I.2.

a) Montrer : $M \in \ker(f) \Leftrightarrow DN = NC$.

b) Déterminer les matrices N carrées d'ordre trois telles que : $DN = NC$.

c) Montrer que l'ensemble des matrices N carrées d'ordre trois telles que $DN = NC$ est un espace vectoriel, et en déterminer une base et la dimension.

3. Donner au moins un élément non nul de $\ker(f)$.

Exercice 4 – Ecricome 2011 (7,5 points)

PARTIE I. Un jeu en ligne.

La société Leazard met à la disposition de ses clients un nouveau jeu en ligne dont la page d'écran affiche une grille à trois lignes et trois colonnes.

Après une mise initiale de 2 euros du joueur, une fonction aléatoire place au hasard successivement trois jetons (●) dans trois cases différentes. La partie est gagnée si les trois jetons sont alignés. Le gagnant empoche 10 fois sa mise, ce qui lui rapporte 18 euros à l'issue du jeu. Dans le cas contraire la mise initiale est perdue par le joueur.

	A	B	C
1	●		
2	●		
3		●	

On définit les événements H, V, D, N par :

. H : « les trois jetons sont alignés horizontalement » .

. V : « les trois jetons sont alignés verticalement » .

. D : « les trois jetons sont alignés en diagonale » .

. N : « les trois jetons ne sont pas alignés » .

1. Justifier qu'il y a 84 positionnements possibles des trois jetons dans les trois cases.

2. Déterminer les probabilités P(H), P(V), P(D) des événements H, V, D.

En déduire que la probabilité de l'événement N est égale à : $P(N) = \frac{19}{21} \approx 0,9048$

3. La société peut s'attendre à 10 000 relances par jour de ce jeu.

a) Pour chaque entier naturel i non nul, on note Z_i le gain de la société à la i-ème relance.

Calculer l'espérance mathématique $E(Z_i)$ de Z_i .

b) Quel gain journalier Z la société peut-elle espérer ?

PARTIE II Simulation informatique

On veut simuler informatiquement le placement d'un seul jeton dans cette grille. Le choix d'un placement correspond au choix d'une ligne et d'une colonne. La grille sera représentée informatiquement par un tableau de trois lignes et trois colonnes numérotées de 1 à 3.

Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, et $j \in \{1, 2, 3\}$, `grille[i,j]` sera égale à 1 si le jeton est placé dessus, 0 sinon.

1. Rappeler comment obtenir en Pascal les nombres 1, 2 ou 3 de manière aléatoire et équiprobable.

2. Compléter ce programme pour qu'il initialise toutes les cases de la grille à 0, puis qu'il simule le placement d'un jeton.

```
program ecricome2011;
type tableau=ARRAY[1..3,1..3] of integer;
var grille : tableau;    ligne, colonne : integer;
begin
  randomize;
  ...
  ligne:=...
  colonne:=...
  grille[ligne, colonne] := ...;
end.
```

PARTIE III. Cas de joueurs invétérés.

1. Un joueur décide de jouer 100 parties consécutives que l'on suppose indépendantes.
 - a) Donner la loi de la variable aléatoire X égale au nombre de parties gagnées.
 - b) Indiquer l'espérance et la variance de X.
 - c) Exprimer la perte T du joueur en fonction de X. En déduire l'espérance et la variance de T.
2. Quel nombre minimum n de parties devrait-il jouer pour que la probabilité de gagner au moins une partie soit supérieure ou égale à 50% ?

(On admettra que $\ln\left(\frac{19}{21}\right) \approx -0,1$ et $\ln(2) \approx 0,7$)

3. Un autre joueur décide de jouer et de miser tant qu'une partie n'est pas gagnée. On note Y la variable aléatoire égale au nombre de parties jouées pour gagner la première fois.
 - a) Donner la loi de la variable aléatoire Y .
 - b) Indiquer l'espérance et la variance de Y .
 - c) Pour tout entier naturel k, montrer que la probabilité p_k que le joueur joue au plus k parties avant de gagner pour la première fois, est donnée par la formule :

$$p_k = 1 - \left(\frac{19}{21}\right)^k$$

PARTIE IV. Contrôle de la qualité du jeu.

On constate que, parfois, la fonction aléatoire est déréglée. Dans ce cas, elle place le premier jeton dans la case (A; 1) , les deux autres étant placés au hasard dans les cases restantes. On note Δ l'événement « la fonction aléatoire est déréglée » et on pose $P(\Delta) = x$ avec $x \in]0; 1[$.

1. Calculer les probabilités conditionnelles $P_{\Delta}(H)$, $P_{\Delta}(V)$ et $P_{\Delta}(D)$ des événements H, V, D sachant l'événement Δ .
2. En déduire que la probabilité les jetons ne soient pas alignés est égal à :

$$P(N) = -\frac{x}{84} + \frac{19}{21}$$

3. On joue une partie. On constate que les jetons sont alignés. Quelle est la probabilité, en fonction de x, que la fonction aléatoire ait été déréglée ?