ECE1 : Correction du concours blanc n°2

Exercice 1

Partie I : 1. f est dérivable sur]0; + ∞[car produit de fonctions dérivables et

$\forall x > 0,\ f'(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)e^{x-1} + (x + \ln(x))e^{x-1} = \left(1 + \frac{1}{x} + x + \ln(x)\right)e^{x-1}$

2. Sur]0; + ∞[, posons $h(x) = \ln(x) + \frac{1}{x}$ alors $h'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$

x	0	1	$+\infty$
$h'(x)$	‖ $-$	0	$+$
$h(x)$	‖ $\searrow$	1	$\nearrow$

Le minimum de h est h(1) = 1 donc $\forall x > 0 \quad h(x) > 0$

3. $\forall x > 0$ $x + 1 > 0$ donc, d'après la question 2., $x + \ln(x) + 1 + \frac{1}{x} > 0$

Donc $\forall x > 0$, $f'(x) > 0$ donc f est croissante sur]0; + ∞[.

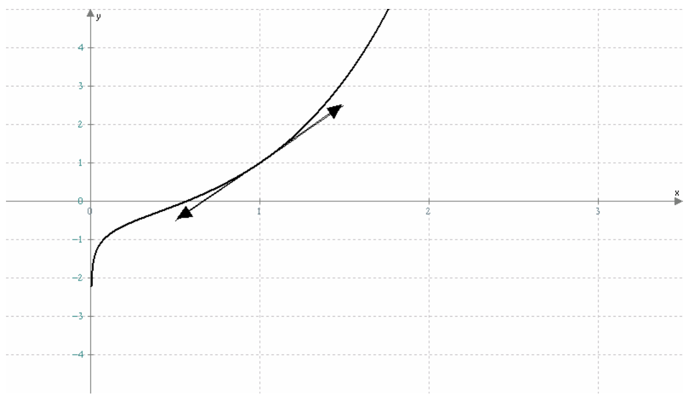
$\lim\limits_{x \to +\infty} x + \ln(x) = +\infty \quad \lim\limits_{x \to +\infty} e^{x-1} = +\infty$ donc

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 0} x + \ln(x) = -\infty \quad \lim\limits_{x \to 0} e^{x-1} = e^{-1} > 0$ donc

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty \quad f(1) = (1 + \ln(1))e^0 = 1 \quad f'(1) = 3$

4. $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$ donc C admet une asymptote verticale d'équation x = 0.



$\frac{f(x)}{x} = (x + \ln(x))\frac{e^{x-1}}{x} \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{x-1}}{x} = +\infty$ (croissances comparées) donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.

Donc C admet une branche parabolique de direction (Oy).

3. program eml2011;

```
var n:integer;u:real;
begin   n:=0;u:=2;
  repeat n:=n+1;u:=(u+ln(u))*exp(u-1);
  until u>=1E20;
  writeln(n);readln;
end.
```

Exercice 2 1. $I_1 = \int_1^e x^2\ln(x)dx$ Intégration par parties : on pose $\begin{cases} u(x) = \ln(x) \\ v'(x) = x^2 \end{cases}$ donc $\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = \frac{x^3}{3} \end{cases}$

Donc $I_1 = \left[\frac{x^3\ln(x)}{3}\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{3}dx = \frac{e^3}{3} - 0 - \left[\frac{x^3}{9}\right]_1^e = \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2e^3+1}{9}$

2. a) $\forall x \in [1;e]$ $1 \le x \le e$ donc $\ln(1) \le \ln(x) \le \ln(e)$ $\quad 0 \le \ln(x) \le 1$ ($\times \ln(x) > 0$) $0 \le \ln(x)^{n+1} \le \ln(x)^n$

Donc $\forall x \in [1;e]$, $x^2\ln(x)^{n+1} \le x^2\ln(x)^n$ donc $\int_1^e x^2\ln(x)^{n+1}dx \le \int_1^e x^2\ln(x)^n dx \quad I_{n+1} \le I_n$

Donc (I_n) est décroissante.

b) $\forall x \in [1;e]$ $x^2\ln(x)^n \ge 0$ donc $I_n \ge 0$. (I_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle converge.

c) Pour $x \in [1;e]$, posons $h(x) = \frac{x}{e} - \ln(x)$ donc $h'(x) = \frac{1}{e} - \frac{1}{x} = \frac{x-e}{ex}$

x	1	e
h '(x)	–	0
h(x)	$\searrow$	0

$h(e) = \frac{e}{e} - \ln(e) = 0$ donc $\forall x \in [1;e]$, $h(x) \geq 0$ $\ln(x) \leq \frac{x}{e}$ donc $0 \leq \ln(x) \leq \frac{x}{e}$.

Donc $\forall x \in [1;e]$, $0 \leq \ln(x)^n \leq \left(\frac{x}{e}\right)^n$ $\quad 0 \leq x^2\ln(x)^n \leq \frac{x^{n+2}}{e^n}$

2. Donc $0 \leq I_n \leq \int_1^e \frac{x^{n+2}}{e^n}dx$ $\quad 0 \leq I_n \leq \left[\frac{x^{n+3}}{(n+3)e^n}\right]_1^e$ $\quad 0 \leq I_n \leq \frac{e^3}{n+3} - \frac{1}{(n+3)e^n}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{e^3}{n+3} - \frac{1}{(n+3)e^n} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$.

3) a) $I_{n+1} = \int_1^e x^2\ln(x)^{n+1}dx$ Intégration par parties : $\begin{cases} u(x) = \ln(x)^{n+1} \\ v'(x) = x^2 \end{cases}$ $\begin{cases} u'(x) = (n+1)\times\frac{1}{x}\times\ln(x)^n \\ v(x) = \frac{x^3}{3} \end{cases}$

Donc $I_{n+1} = \left[\frac{x^3\ln(x)^{n+1}}{3}\right]_1^e - \int_1^e \frac{n+1}{3}x^2\ln(x)^n dx$ $\quad I_{n+1} = \frac{e^3}{3} - 0 - \frac{n+1}{3}\int_1^e x^2\ln(x)^n dx = \frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3}I_n$.

b) Donc $3I_{n+1} = e^3 - nI_n - I_n$ $\quad nI_n = e^3 - 3I_{n+1} - I_n$ $\quad \lim\limits_{n \to +\infty} I_n = \lim\limits_{n \to +\infty} I_{n+1} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} nI_n = e^3$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{I_n}{\frac{e^3}{n}} = 1$ $\quad I_n \sim_{+\infty} \frac{e^3}{n}$

Exercice 3 1.a) (S_λ) : $\Leftrightarrow \begin{cases} -2x - 2y + (-1-\lambda)z = 0 \\ -\lambda y - z = 0 & L_1 \leftrightarrow L_3 \\ (1-\lambda)x + y + z = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x - 2y + (-1-\lambda)z = 0 \\ -\lambda y - z = 0 \\ 2\lambda y + (\lambda^2+1)z = 0 \end{cases}$ $L_3 \leftarrow (1-\lambda)L_1 + 2L_3$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y + (1+\lambda)z = 0 & L_1 \leftarrow -L_1 \\ \lambda y + z = 0 & L_2 \leftarrow -L_2 \\ (\lambda^2-1)z = 0 & L_3 \leftarrow 2L_2 + L_3 \end{cases}$

Donc (S_λ) n'est pas de Cramer si et seulement si $\lambda = 0$ ou $\lambda^2 - 1 = 0$. Donc si $\lambda = 0, 1, -1$.

b) $(S_0) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y + z = 0 \\ z = 0 \\ -z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ z = 0 \end{cases}$ Donc $\mathcal{S}_0 = \left\{\begin{pmatrix} x \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}\right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$. $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est non nul, donc c'est une base de $\mathcal{S}$.

$(S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y + 2z = 0 \\ y + z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -z \end{cases}$ $\quad \mathcal{S}_1 = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ z \end{pmatrix}, z \in \mathbb{R}\right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ (base de $\mathcal{S}$)

$(S_{-1}) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ -y + z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = z \end{cases}$ $\quad \mathcal{S}_{-1} = \left\{\begin{pmatrix} -z \\ z \\ z \end{pmatrix}, z \in \mathbb{R}\right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ (base de $\mathcal{S}$)

2. $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $L_2 \leftarrow L_1 + L_2$

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $L_3 \leftrightarrow L_2$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $L_2 \leftarrow L_2 + L_3$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$ donc P est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ = C est bien diagonale

Partie II : 1. dim(E) = 3×3 = 9 2. $\forall$ M $\in \mathcal{E}$, $\forall$ M' $\in \mathcal{E}$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,

f(M + M') = A(M + M') – (M + M')B = AM + AM' – MB – M'B = AM – MB + AM' – M'B = f(M) + f(M')

f(λM) = A(λM) – (λM)B = λAM - λMB = λ(AM – MB) = λf(M). f est un endomorphisme de $\mathcal{E}$.

3. a) M $\in$ Ker(f) $\Leftrightarrow$ AM – MB = 0 $\Leftrightarrow$ AM = MB

($C = P^{-1}BP \Leftrightarrow B = PCP^{-1}$) $\Leftrightarrow PDP^{-1}M = MPCP^{-1}$

$\Leftrightarrow P^{-1}PDP^{-1}MP = P^{-1}MPCP^{-1}P$ (×P^{-1} à gauche, ×P à droite)

$\Leftrightarrow DP^{-1}MP = P^{-1}MPC \Leftrightarrow DN = NC$

c) Soit N = $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ alors DN = $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -d & -e & -f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

NC = $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & -c \\ d & 0 & -f \\ g & 0 & -i \end{pmatrix}$

Donc DN = NC $\Leftrightarrow$ a=0;-c = 0;-d = d;-e = 0;h = 0;i = -i $\Leftrightarrow$ a = c = d = e = h = i = 0

Donc N = $\begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & f \\ g & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathcal{F}$ = {N $\in \mathcal{E}$/DN = NC} = $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & f \\ g & 0 & 0 \end{pmatrix}, b \in \mathbb{R}, f \in \mathbb{R}, g \in \mathbb{R} \right\}$

$= \left\{ b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + g\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, b \in \mathbb{R}, f \in \mathbb{R}, g \in \mathbb{R} \right\}$

= Vect(J, K, L) avec J = $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, K = $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et L = $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Donc c'est un sous-espace vectoriel de E, et (I, J, K) est une famille génératrice.

De plus aJ + bK + cL = 0 $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$ donc c'est une famille libre.

Donc (J, K, L) est une base de $\mathcal{F}$, de dimension 3.

4) a) M $\in$ Ker(f) $\Leftrightarrow$ M = PNP^{-1}, avec N = $\begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & f \\ g & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Avec b = 1, f = 0 et g = 0, on trouve :

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ convient

Exercice 4 Partie I 1. On choisit 3 cases distinctes parmi 9, l'ordre n'intervient pas. Il y a donc $\binom{9}{3}$ $= \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2}$ = 84 possibilités. 2. Il y a trois possibilités pour que les jetons soient alignés horizontalement, 3 pour qu'ils soient alignés verticalement, et 2 en diagonale. Par équiprobabilité :

P(H) = P(V) = $\frac{3}{84} = \frac{1}{28}$ et P(D) = $\frac{2}{84} = \frac{1}{42}$

(H, V, D, N) forment un système complet d'événements, donc P(N) = 1 – P(H) – P(V) – P(D) = $\frac{84-3-3-2}{84} = \frac{76}{84} = \frac{19}{21}$

3. a) Loi de Z_i : $P(Z_i = 2) = \frac{19}{21}$ $P(Z_i = -18) = \frac{2}{21}$ $E(Z_i) = 2\times\frac{19}{21} - 18\times\frac{2}{21} = \frac{2}{21}$

b) $Z = \sum_{i=1}^{10000} Z_i$ par linéarité de l'espérance $E(Z) = \sum_{i=1}^{10000} E(Z_i) = 10000\times\frac{2}{21} = \frac{20000}{21}$

Partie II 1. random(3) + 1 renvoie 1, 2 ou 3 avec équiprobabilité

2. randomize;

```
  for ligne:=1 to 3 do for colonne:=1 to 3 do grille[ligne,colonne]:=0;
  ligne := random(3)+1;
  colonne := random(3)+1;
  grille[ligne,colonne]:=1;
```

Partie III : 1. a) Chaque partie est gagnée avec une probabilité $\frac{2}{21}$. Il y a 100 parties indépendantes. X est le nombre de parties gagnées. Donc $X \longrightarrow \mathcal{B}(100, 2/21)$.

b) $E(X) = 100 \times \frac{2}{21} = \frac{200}{21}$ $V(X) = 100 \times \frac{2}{21} \times \frac{19}{21} = \frac{3800}{441}$

c) T = -18×nb de parties gagnées + 2×nb de parties perdues = $-18X + 2(100 - X) = 200 - 20X$

Donc $E(T) = 200 - 20E(X) = 200 - 20\times\frac{200}{21} = \frac{200}{21}$ $V(T) = (-20)^2V(X) = \frac{4000\times3800}{441} = \frac{152000000}{441}$

2. S'il joue n parties, $X \longrightarrow \mathcal{B}(n, 2/21)$ donc $P(X > 0) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{n}{0}\left(\frac{2}{21}\right)^0\left(\frac{19}{21}\right)^n = 1 - \left(\frac{19}{21}\right)^n$

$P(X > 0) \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{19}{21}\right)^n \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \geq \left(\frac{19}{21}\right)^n \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right) \geq n \times \ln\left(\frac{19}{21}\right)$

$\Leftrightarrow n \geq -\frac{\ln(2)}{\ln(19/21)}$ (car $\ln(19/21) < 0$) d'après les valeurs approchées de l'énoncé $n \geq 7$

3. a) Les parties sont indépendantes. Chaque partie est gagnée avec une probabilité $\frac{2}{21}$ et Y est le rang de la première partie gagnée. Donc $Y \longrightarrow \mathcal{G}(2/21)$.

b) Donc $E(Y) = \frac{1}{\frac{2}{21}} = \frac{21}{2}$ $V(Y) = \frac{\frac{19}{21}}{\left(\frac{2}{21}\right)^2} = \frac{19}{21} \times \frac{21^2}{4} = \frac{19\times21}{4} = \frac{399}{4}$

c) $\forall k \in \mathbb{N}$, $(Y > k)$ = "les k premiers essais sont des échecs" donc par indépendance :

$P(Y > k) = \left(\frac{19}{21}\right)^k$ donc $p_k = P(Y \leq k) = 1 - P(Y > k) = 1 - \left(\frac{19}{21}\right)^k$

Partie IV 1. Sachant Δ : il reste deux jetons à placer dans 8 cases donc $\binom{8}{2} = \frac{8\times7}{2} = 28$ possibilités.

1 possibilité qu'ils soient alignés horizontalement, 1 verticalement, et 1 diagonalement.

Donc $P_\Delta(H) = P_\Delta(V) = P_\Delta(D) = \frac{1}{28}$ donc $P_\Delta(N) = 1 - \frac{3}{28} = \frac{25}{28}$

2. $(\Delta, \overline{\Delta})$ est un système complet d'événements, donc d'après la formule des probabilités totales,

$P(N) = P(\Delta)P_\Delta(N) + P(\overline{\Delta})P_{\overline{\Delta}}(N) = x\times\frac{25}{28} + (1 - x) \times \frac{19}{21} = \frac{75-76}{84}x + \frac{19}{21} = -\frac{x}{84} + \frac{19}{21}$.

3. $P_{\overline{N}}(\Delta) = \frac{P(\Delta \cap \overline{N})}{P(\overline{N})} = \frac{P(\Delta)P_\Delta(\overline{N})}{P(\overline{N})} = \frac{x \times \frac{3}{28}}{\frac{2}{21} + \frac{x}{84}} = \frac{\frac{9x}{84}}{\frac{8+x}{84}} = \frac{9x}{8+x}$