ECE1 : Concours blanc n°1

Lundi 13 Décembre 2010

4 heures

L'utilisation de tout matériel électronique (calculatrice, téléphone portable) est strictement interdite.
Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 (d'après ESC 2000) *(6,5 points)*

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + x + 1}$

Etudier les variations de f.

2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et pour tout entier } n,\ u_{n+1} = f(u_n) = \frac{u_n}{u_n^2 + u_n + 1}$$

a) Soit p un entier naturel non nul. Montrer que : $f\left(\dfrac{1}{p}\right) \leq \dfrac{1}{p+1}$

b) En déduire par récurrence que pour tout entier n, $0 < u_n \leq \dfrac{1}{n+1}$

c) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

d) Etudier le sens de variation de la suite (u_n).

e) Vérifier que $\dfrac{1}{u_{n+1}} = u_n + 1 + \dfrac{1}{u_n}$

f) En déduire par récurrence et à l'aide du 2.b) que pour tout entier $n \geq 1$,

$\dfrac{1}{u_n} \leq n + 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$

3. On admet dans la suite que pour tout réel $x \geq 2$, $\dfrac{1}{x} \leq \ln(x) - \ln(x-1)$

a) Montrer que : pour tout entier $n \geq 2$, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k} \leq \ln(n)$.

puis que : pour tout entier $n \geq 2$, $\dfrac{1}{u_n} \leq n + 2 + \ln(n)$

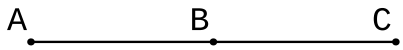
b) A l'aide des résultats précédents, montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} n \times u_n = 1$.

En déduire un équivalent simple de u_n.

4. Ecrire un programme Pascal qui calcule puis affiche la valeur de u_{50}.

Exercice 2 *(4,5 points)*

Une puce se déplace entre 3 points A, B, C, situés de la manière suivante :



A l'instant n = 0, la puce se situe en A.

- Si la puce est en A à l'instant n, alors à l'instant n + 1, elle reste en A ou saute en B avec la même probabilité
- Si la puce est en B à l'instant n, alors à l'instant n + 1, elle reste en B ou saute en A ou en C avec la même probabilité
- Si la puce est en C à l'instant n, alors à l'instant n + 1, elle reste en C ou saute en B avec la même probabilité.

On note A_n = "La puce est en A à l'instant n" B_n = "La puce est en B à l'instant n"
et C_n = "La puce est en C à l'instant n".
On note également : $a_n = P(A_n)$, $b_n = P(B_n)$, $c_n = P(C_n)$.

1. Déterminer a_0, b_0, c_0.
2. Déterminer $P_{A_n}(A_{n+1})$ ainsi que les huit probabilités conditionnelles analogues.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n, et c_n.
4. a) Que vaut $a_n + b_n + c_n$? Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} = -\dfrac{1}{6} b_n + \dfrac{1}{2}$.

b) Déterminer l'expression de b_n en fonction de n.
En déduire que $a_n + c_n = \dfrac{4}{7} + \dfrac{3}{7}\left(-\dfrac{1}{6}\right)^n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$.

5. Exprimer $a_{n+1} - c_{n+1}$ en fonction de $a_n - c_n$.
En déduire que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $a_n - c_n = \dfrac{1}{2^n}$.
6. Déterminer l'expression de a_n et de c_n en fonction de n.
7. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n$, $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} c_n$.

Exercice 3 *(4 points)*

On considère deux urnes :
• une urne verte contenant une boule rouge et 3 boules vertes
• une urne rouge contenant deux boules rouges et deux vertes.

On effectue une suite de tirages d'une boule avec remise de la façon suivante :
• le premier tirage est effectué dans l'urne verte
• à partir du second, ils sont effectués dans l'urne dont la couleur est celle de la boule obtenue au tirage précédent.

Pour tout entier n non nul, on notera V_n le fait d'obtenir une boule verte lors du $n^{\text{ième}}$ tirage et $\mathcal{V}n$ le fait de l'effectuer dans l'urne verte - de même pour rouge-.

1. Les deux premiers tirages
a) Si le premier tirage a donné une boule rouge, quelle est la probabilité d'obtenir alors une boule verte au second tirage ?
b) Quelle est la probabilité d'obtenir une boule verte au second tirage ?
c) On a obtenu une boule verte au second tirage.
Quelle est la probabilité que ce tirage ait été effectué dans l'urne rouge ?
d) Les événements V_1 et V_2 sont-ils indépendants ?
e) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules vertes tirées lors de ces deux premiers tirages. Déterminer la loi de X.

2. Les trois premiers tirages
Déterminer la probabilité d'obtenir
a) la première boule verte au troisième tirage.
b) au moins une boule verte dans les trois premiers tirages.
c) une seule boule rouge lors des trois premiers tirages.

Exercice 4 *(5 points)*

On effectue des tirages au hasard dans une urne contenant des boules numérotées de 1 à 10.

Les trois parties sont indépendantes

1. Soit $N \geq 1$. Dans cette question, on effectue N tirages dans l'urne, la boule tirée étant ensuite remise immédiatement dans l'urne.
Soit X la variable aléatoire égale au rang de la première apparition de la boule n°1, s'il y en a au moins une, et à 0 sinon.
Pour $i \in \{1, \dots, N\}$, on pourra noter A_i = "La boule n°1 apparaît au i-ème tirage".
a) Pour $k \in \{1, .., N\}$, déterminer $P(X = k)$.
b) En explicitant l'événement $(X = 0)$, déterminer $P(X = 0)$.
c) Calculer $\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{10}\left(\frac{9}{10}\right)^{k-1}$. Ce résultat est-il cohérent ?

2. Dans cette question, on tire successivement et sans les remettre toutes les boules de l'urne.
Soit Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la boule n°1.
Déterminer la loi de Y.

3. Dans cette question, on effectue des tirages avec remise jusqu'à obtenir une boule déjà obtenue auparavant. Soit Z la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.
a. Déterminer $Z(\Omega)$
b. Déterminer $P(Z = 2)$ et $P(Z = 3)$.
c. Pour $k \in \{1,\dots,10\}$, expliciter l'événement $(Z > k)$ et montrer que $P(Z > k) = \frac{10!}{10^k(10-k)!}$
d. Pour $k \in \{2,\dots,10\}$, déterminer une relation entre $P(Z > k)$, $P(Z > k-1)$ et $P(Z = k)$.
e. Déterminer la loi de Z.

Joyeux Noël !