

ECE1 : Correction du Concours Blanc n°1

Exercice 1

$$1. f'(x) = \frac{x^2 + x + 1 - x(2x + 1)}{(x^2 + x + 1)^2} = \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + x + 1)^2} = \frac{(1-x)(1+x)}{(x^2 + x + 1)^2}$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$(1-x)(1+x)$	-	0	+	-
$f'(x)$	-	0	+	-
$f(x)$				

$$2. a) f\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{\frac{1}{p}}{\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p} + 1} = \frac{1}{p + 1 + \frac{1}{p}} \quad p + 1 + \frac{1}{p} \geq p + 1 \text{ donc } \frac{1}{p + 1 + \frac{1}{p}} \leq \frac{1}{p + 1} \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{p}\right) \leq \frac{1}{p + 1}$$

$$b) \text{ Pour } n = 0 \quad u_0 = 1 \quad \frac{1}{0 + 1} = 1 \text{ donc } 0 < u_0 \leq \frac{1}{0 + 1}$$

Supposons que $0 < u_n \leq \frac{1}{n + 1}$.

La fonction f est strictement croissante sur $[0;1]$ et $0, u_n, \frac{1}{n + 1}$ appartiennent à cet intervalle,

$$\text{donc } f(0) < f(u_n) \leq f\left(\frac{1}{n + 1}\right) \Leftrightarrow 0 < u_{n+1} \leq f\left(\frac{1}{n + 1}\right)$$

D'après la question a, $f\left(\frac{1}{n + 1}\right) \leq \frac{1}{n + 2}$ donc $0 < u_{n+1} \leq \frac{1}{n + 2}$. La propriété est héréditaire.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n \leq \frac{1}{n + 1}$.

$$c) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n + 1} = 0, \text{ donc d'après le théorème des gendarmes, } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

$$d) u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{1 + u_n + u_n^2} - u_n = \frac{u_n - u_n(u_n^2 + u_n + 1)}{u_n^2 + u_n + 1} = \frac{-u_n^3 - u_n^2}{1 + u_n + u_n^2} = \frac{-u_n^2(1 + u_n)}{1 + u_n + u_n^2}$$

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$ donc $1 + u_n \geq 0$ et $1 + u_n + u_n^2 \geq 0$. Donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$. Donc (u_n) est décroissante.

$$d) \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{u_n^2 + u_n + 1}{u_n} = \frac{u_n^2}{u_n} + \frac{u_n}{u_n} + \frac{1}{u_n} = u_n + 1 + \frac{1}{u_n}$$

$$e) \text{ Initialisation pour } n = 1 : u_1 = \frac{u_0}{u_0^2 + u_0 + 1} = \frac{1}{3} \quad \frac{1}{u_1} = 3$$

$$1 + 1 + \sum_{k=1}^1 \frac{1}{k} = 1 + 1 + \frac{1}{1} = 3 \text{ donc la propriété est vraie au rang 1.}$$

Supposons que $\frac{1}{u_n} \leq n + 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ Alors $\frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n} + 1 + u_n \leq n + 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + 1 + \frac{1}{n + 1}$ (d'après question b) et hypothèse de récurrence)

$$\frac{1}{u_{n+1}} \leq n + 2 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} \text{ donc la propriété est héréditaire. Conclusion : } \forall n \geq 1, \frac{1}{u_n} \leq n + 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

$$3) a) \forall k \geq 2, \frac{1}{k} \leq \ln(k) - \ln(k - 1). \text{ Donc } \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq \sum_{k=2}^n (\ln(k) - \ln(k - 1))$$

Or $\sum_{k=2}^n (\ln(k) - \ln(k-1)) = \ln(n) - \ln(n-1) + \ln(n-1) - \ln(n-2) + \dots + \ln(2) - \ln(1)$

$= \ln(n) - \ln(1) = \ln(n)$ (somme télescopique). Donc $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq \ln(n)$.

Donc $\frac{1}{u_n} \leq n + 1 + \frac{1}{1} + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq n + 2 + \ln(n)$.

c) Donc $u_n \geq \frac{1}{n + 2 + \ln(n)}$ $nu_n \geq \frac{n}{n + 2 + \ln(n)}$

De plus $u_n \leq \frac{1}{n+1} \Rightarrow nu_n \leq \frac{n}{n+1}$ Donc $\frac{n}{n+2+\ln(n)} \leq nu_n \leq \frac{n}{n+1}$

$\ln(n) = o(n)$ (croissances comparées) donc $\frac{n}{n+2+\ln(n)} \sim \frac{n}{n} \sim 1$

$\frac{n}{n+1} \sim \frac{n}{n} \sim 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+2+\ln(n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$.

D'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n = 1$. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{\frac{1}{n}} = 1$ donc $u_n \sim_{+\infty} \frac{1}{n}$.

```
4. program cb1;
var i : integer;
    u : real;
begin
  u := 1;
  for i:=1 to 50 do u := u/(1+u+u*u);
  writeln('u50 vaut',u);
  readln;
end.
```

Exercice 2

1. A l'instant 0, la puce est en A. Donc $a_0 = P(A_0) = 1$, $b_0 = P(B_0) = 0$, $c_0 = P(C_0) = 0$.

2. D'après l'énoncé, on a : $P_{A_n}(A_{n+1}) = P_{A_n}(B_{n+1}) = \frac{1}{2}$ $P_{A_n}(C_{n+1}) = 0$

$P_{B_n}(A_{n+1}) = P_{B_n}(B_{n+1}) = P_{B_n}(C_{n+1}) = \frac{1}{3}$ $P_{C_n}(A_{n+1}) = 0$ $P_{C_n}(B_{n+1}) = P_{C_n}(C_{n+1}) = \frac{1}{2}$.

3. (A_n, B_n, C_n) forment un système complet d'événements.

Donc, d'après la formule des probabilités totales,

$P(A_{n+1}) = P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(A_{n+1})$

$= a_n \times \frac{1}{2} + b_n \times \frac{1}{3} + c_n \times 0 = \frac{1}{2} a_n + \frac{1}{3} b_n$.

De même $b_{n+1} = P(B_{n+1}) = \frac{1}{2} a_n + \frac{1}{3} b_n + \frac{1}{2} c_n$ et $c_{n+1} = P(C_{n+1}) = 0 \times a_n + \frac{1}{3} \times b_n + \frac{1}{2} \times c_n$

4. a) (A_n, B_n, C_n) forment un système complet d'événements, donc $a_n + b_n + c_n = 1$.

b) Donc $b_{n+1} = \frac{1}{2} (a_n + c_n) + \frac{1}{3} b_n = \frac{1}{2} (1 - b_n) + \frac{1}{3} b_n = -\frac{1}{6} b_n + \frac{1}{2}$

c) (b_n) est donc une suite arithmético-géométrique.

Point fixe : $c = -\frac{1}{6} c + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{7}{6} c = \frac{1}{2} \Leftrightarrow c = \frac{3}{7}$

Donc $u_n = b_n - \frac{3}{7}$ est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{6}$.

$$b_n - \frac{3}{7} = \left(-\frac{1}{6}\right)^n \left(b_0 - \frac{3}{7}\right) \quad b_n = \frac{3}{7} - \frac{3}{7} \left(-\frac{1}{6}\right)^n$$

$$d) a_n + c_n = 1 - b_n = \frac{4}{7} + \frac{3}{7} \left(-\frac{1}{6}\right)^n$$

$$5. a_{n+1} - c_{n+1} = \frac{1}{2} a_n + \frac{1}{3} b_n - \frac{1}{3} b_n - \frac{1}{2} c_n = \frac{1}{2} (a_n - c_n).$$

Donc la suite $(a_n - c_n)$ est géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$. Donc $a_n - c_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (a_0 - c_0) = \frac{1}{2^n}$.

$$6. a_n - c_n = \frac{1}{2^n} \Leftrightarrow a_n = c_n + \frac{1}{2^n}$$

$$\text{Comme } a_n + c_n = \frac{4}{7} + \frac{3}{7} \left(-\frac{1}{6}\right)^n \quad 2c_n + \frac{1}{2^n} = \frac{4}{7} + \frac{3}{7} \left(-\frac{1}{6}\right)^n \quad c_n = \frac{2}{7} + \frac{3}{14} \left(-\frac{1}{6}\right)^n - \frac{1}{2 \times 2^n}$$

$$a_n = c_n + \frac{1}{2^n} = \frac{2}{7} + \frac{3}{14} \left(-\frac{1}{6}\right)^n + \frac{1}{2 \times 2^n}$$

$$6) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{6}\right)^n = 0 \text{ (car } -1 < -\frac{1}{6} < 1) \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{2}{7}, \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \frac{3}{7}, \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = \frac{2}{7}.$$

Exercice 3

1) a) Si le premier tirage a donné une boule rouge, le deuxième s'effectue dans l'urne rouge.

$$\text{Donc } P_{R1}(V_2) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

b) (R_1, V_1) forment un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales, $P(V_2) = P(R_1) \times P_{R1}(V_2) + P(V_1) P_{V1}(V_2) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{11}{16}$

c) le 2^{ème} dans l'urne rouge $\Leftrightarrow$ boule rouge au premier tirage.

$$\text{D'après la formule de Bayes, } P_{V2}(R_1) = \frac{P(R_1)P_{R1}(V_2)}{P(V_2)} = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{1}{2}}{\frac{11}{16}} = \frac{16}{11 \times 8} = \frac{2}{11}$$

d) $P(V_1) \times P(V_2) = \frac{3}{4} \times \frac{11}{16} = \frac{33}{64}$ $P(V_1 \cap V_2) = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16} \neq P(V_1) \times P(V_2)$ donc V_1 et V_2 ne sont pas indépendants.

$$d) X(\Omega) = \{0, 1, 2\} \quad P(X = 0) = P(R_1 R_2) = P(R_1) P_{R1}(R_2) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$$P(X = 1) = P((R_1 V_2 \cup V_1 R_2)) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{5}{16} \quad P(X = 2) = P(V_1 V_2) = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$$

i	0	1	2
$P(X = i)$	2/16	5/16	9/16

$$2. a) P(R_1 \cap R_2 \cap V_3) = P(R_1) P_{R1}(R_2) P_{R1 \cap R2}(V_3) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$$

$$b) P(R_1 R_2 R_3) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16} \quad P(B) = 1 - P(R_1 R_2 R_3) = \frac{15}{16}.$$

$$c) P(R_1 V_2 V_3 \cup V_1 R_2 V_3 \cup V_1 V_2 R_3) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{32} + \frac{3}{32} + \frac{9}{64} = \frac{21}{64}$$

Exercice 4

1. a) $(X = k) = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_{k-1}} \cap A_k$ Les tirages sont indépendants (avec remise)

$$\text{Donc } P(X = k) = \left(\frac{9}{10}\right)^{k-1} \frac{1}{10}$$

$$\text{b) } (X = 0) = \overline{A_1} \cap \dots \cap \overline{A_N} \quad \text{donc } P(X = 0) = \left(\frac{9}{10}\right)^N$$

$$\text{c) En posant } k' = k - 1, \sum_{k=1}^N \left(\frac{9}{10}\right)^{k-1} \frac{1}{10} = \frac{1}{10} \sum_{k'=0}^{N-1} \left(\frac{9}{10}\right)^{k'} = \frac{1}{10} \times \frac{1 - \left(\frac{9}{10}\right)^N}{1 - \frac{9}{10}} = 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^N$$

$$\text{Donc } \sum_{k=0}^N P(X = k) = P(X = 0) + \sum_{k=1}^N P(X = k) = \left(\frac{9}{10}\right)^N + 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^N = 1$$

Le résultat est cohérent, car les $(X = k)_{k \in \{0, \dots, N\}}$ forment un S.C.E.

2) $Y(\Omega) = \{1, \dots, 10\}$ $\text{card}(\Omega) = A_{10}^{10} = 10!$ (10 tirages successifs sans remise)

$$\text{card}(Y = k) = A_9^{k-1} \times 1 \times A_{10-k}^{10-k} = \frac{9!}{(10-k)!} \times 1 \times (10-k)! = 9!$$

(choix de $k-1$ parmi les boules 2 à 10, choix de la boule 1, choix des $10-k$ boules restantes)

$$P(X = k) = \frac{9!}{10!} = \frac{1}{10}$$

2. a) $Z(\Omega) = \{2, \dots, 11\}$

b) $(Z = 2) = \text{"les deux premières boules sont les mêmes"}$

2 tirages avec remise : 10^2 possibilités

Choix de la première : 10 de la deuxième : 1

$$P(Z = 2) = \frac{10 \times 1}{10^2} = \frac{1}{10}$$

$(Z = 3) = \text{"les 2 premières sont différentes, la troisième est égale à une des deux premières"}$

$$P(Z = 3) = \frac{10 \times 9 \times 2}{10 \times 10 \times 10} = \frac{9}{50}$$

c. $(Z > k)$ signifie que les k premières boules sont distinctes.

$$\text{Donc } P(Z > k) = \frac{A_{10}^k}{10^k} = \frac{10!}{10^k(10-k)!}$$

d) $(Z > k-1) = (Z \geq k) = (Z = k) \cup (Z > k)$ (événements incompatibles).

Donc $P(Z > k-1) = P(Z = k) + P(Z > k)$

$$P(Z = k) = P(Z > k-1) - P(Z > k)$$

e) Pour $k \in \{1, \dots, 10\}$,

$$P(Z = k) = \frac{10!}{10^{k-1}(11-k)!} - \frac{10!}{10^k(10-k)!} = \frac{10!10}{10^k(11-k)!} - \frac{10!(11-k)}{10^k(11-k)!} = \frac{10!(k-1)}{10^k(11-k)!}$$

$$P(Z = 11) = P(Z > 10) = \frac{10!}{10^{10}} \text{ (formule précédente encore vraie)}$$

OU : k tirages avec remise : 10^k possibilités.

$$\text{Choix de } k-1 \text{ boules différentes : } A_{k-1}^{10} = \frac{10!}{(10-(k-1))!} = \frac{10!}{(11-k)!}$$

$$\text{Choix de la } k^{\text{ème}} \text{ boule : } k-1 \text{ possibilités (une déjà tirée). Donc } P(Z = k) = \frac{\frac{10!}{(11-k)!} \times (k-1)}{10^k}$$