

Etude mathématique

Equation de (T_n) : $y = f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n)$.

Intersection de (T_n) avec l'axe des abscisses : $f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n) = 0$

$$f'(x_n)(x - x_n) = -f(x_n)$$

Comme f' ne s'annule pas : $x - x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad x = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Donc $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

Exercice 1

1) $f'(x) = 3 - e^x$ donc $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{3x_n - e^{x_n}}{3 - e^{x_n}} = \frac{3x_n - x_n e^{x_n} - 3x_n + e^{x_n}}{3 - e^{x_n}} = \frac{e^{x_n}(1 - x_n)}{3 - e^{x_n}}$

2) program ex3;

var x:real;n:integer;

begin

 x:=0;n:=0;

 repeat

 n:=n+1;

 x:=exp(x)*(1-x)/(3-exp(x));

 writeln('x ',n,' vaut ',x);

 until abs(3*x-exp(x))<1E-6;

 readln;

end.

On trouve $\alpha \approx 0,61906128336$

3) Alors que pour la dichotomie, il faut 20 itérations, pour la méthode de Newton, 4 suffisent !

Exercice 2

$f'(x) = 2x$ donc $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \frac{2x_n^2 - x_n^2 + 2}{2x_n} = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n}$

program newton;

var

 x : real;

 n : integer;

begin

 n:=0; x:=2;

 repeat

 n := n + 1;

 x:=(x*x+2)/(2*x);

 writeln('Pour n = ',n,' x vaut ',x);

 until abs(x*x-2)<1E-9;

 readln;

end.

On trouve $x = 1,4142135624$ pour $n = 4$.