ECE2 : T.D. n°7 Simulation de variables aléatoires à densité

Exercice 1 – EDHEC 2010
1) a) Montrer que si x est positif, alors $1 - e^{-x}$ appartient à [0;1[et montrer que si x est strictement négatif, alors $1 - e^{-x}$ est strictement négatif.
b) On considère une variable aléatoire U suivant la loi uniforme sur [0;1[. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire Z = - ln(1 – U), et reconnaître la loi de Z.
c) Simulation informatique de la loi de Z. On rappelle qu'en Turbo Pascal, la fonction random permet de simuler la loi uniforme sur [0;1[. Compléter la déclaration de fonction suivante pour qu'elle simule la loi de Z.

```
function expo : real;
begin
   expo := ……..;
end;
```

Exercice 2 – ESSEC 2009
Problème : Vendre par petites annonces
Présentation : on met en vente un objet dans les petites annonces d'un journal. On reçoit chaque jour une nouvelle offre (et une seule) que l'on peut accepter ou refuser. Cette décision est définitive : en cas de refus, on ne pourra plus accepter cette offre dans les jours qui suivent; en cas d'acceptation, on gagne le montant de l'offre et la parution s'arrête.
Le nombre d'offres est à priori illimité, mais le journal facture un coût c > 0 pour chaque jour de parution. Quand doit-on accepter l'offre proposée ?

Mise en place : On fait les hypothèses suivantes :
Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note X_k l'offre du k-ième jour. Les variables aléatoires X_k sont indépendantes et suivent toutes la loi uniforme sur [a;b]. avec a et b réels positifs.
On appelle N le numéro de l'offre acceptée, et G le gain final que l'on tire de la vente.
On a donc $G = X_N - Nc$.

Stratégie : On se donne une valeur $s \in \mathbb{R}+$, et on choisit d'accepter la première offre supérieure ou égale à s.
L'algorithme ci-contre propose d'expérimenter cette stratégie.
Compléter les instructions manquantes.

```
n:=0;
repeat
    begin
        x:=random;
        y:=…..
        ……..
    end;
  until y>s
write('gain : ',y – n*c);
```

Exercice 3 – D'après HEC 2007 (modifié)

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$

On admet que g est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.
Soit Y une variable aléatoire à valeurs réelles admettant g pour densité. On dit que Y suit la loi de Laplace $\mathcal{L}(0)$.
Soit G la fonction de répartition de Y.
On admet que G est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, qu'elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0;1[$ et que : $G^{-1}(x) = \begin{cases} \ln(2x) \text{ si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -\ln(2(1-x)) \text{ si } \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases}$

1) Soit X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur [0;1]. Posons $Z = G^{-1}(X)$. Montrer que Z suit la loi de Laplace $\mathcal{L}(0)$.
2) Ecrire une fonction Pascal dont l'en-tête est Laplace qui permet de simuler la loi $\mathcal{L}(0)$.
On rappelle que la fonction random permet de simuler en Pascal une loi uniforme sur]0;1[.

Exercice 4 – Loi de Rayleigh

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(t) = 0 \text{ si } t < 0 \\ f(t) = t\exp(-t^2/2) \text{ si } t \geq 0 \end{cases}$

1) Montrer que f est une densité de probabilité.
Soit X une V.A.R. de densité f. On dit que X suit la loi de Rayleigh.
2) Montrer que X admet une espérance et que $E(X) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$
3) Déterminer la fonction de répartition de X.
4) On considère la variable aléatoire $Y = X^2$
a) Montrer que Y suit la loi exponentielle de paramètre 1/2.
b) On rappelle que l'instruction y:=- ln(1-random)/a simule une variable aléatoire de loi $\mathcal{E}(a)$.
Comment simuler la loi de X ?