ECE2: Correction du T.D. n°7

Exercice 1

1) a) si $x \geq 0$ $\quad -x \leq 0$ donc $0 < e^{-x} \leq 1$ $\quad -1 \leq -e^{-x} < 0$ $\quad 0 \leq 1 - e^{-x} < 1$ $\quad 1 - e^{-x} \in [0;1[$

si $x < 0$ $\quad -x > 0$ $\quad e^{-x} > 1$ $\quad -e^{-x} < -1$ $\quad 1 - e^{-x} < 0$

OU : Posons $f(x) = 1 - e^{-x}$ alors $f'(x) = e^{-x} > 0$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f(x)	$-\infty$	$\nearrow$ 0 $\nearrow$	1

Donc si $x < 0$, $1 - e^{-x} < 0$ et si $x \geq 0$, $1 - e^{-x} \in [0;1[$

b) $\forall z \in \mathbb{R}$, $Z \leq z \Leftrightarrow -\ln(1 - U) \leq z \Leftrightarrow \ln(1 - U) \geq -z \Leftrightarrow 1 - U \geq e^{-z} \Leftrightarrow -U \geq e^{-z} - 1$

$\Leftrightarrow U \leq 1 - e^{-z}$

Donc $F_Z(z) = F_U(1 - e^{-z})$

si $z \geq 0$, $1 - e^{-z} \in [0;1[$ donc $F_Z(z) = 1 - e^{-z}$

si $z < 0$, $1 - e^{-z} < 0$ donc $F_Z(z) = 0$ $\quad$ Donc $Z \longrightarrow \mathcal{E}(1)$

c)
```
function expo : real;
begin
  expo := - ln(1 – random);
end;
```

Exercice 2

```
n:=0;
repeat
   begin
       x:=random;
       y:=a+(b-a)*random;
       n:=n+1;
   end;
 until y>s;
write('gain : ',y – n*c);
```

Exercice 3

1) $\forall z \in \mathbb{R}$, $F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(G^{-1}(X) \leq z) = P(X \leq G(z))$ (G croissante sur $\mathbb{R}$)

$= F_X(G(z))$ $\quad$ Or $\forall z \in \mathbb{R}$, $G(z) \in [0;1]$, donc $F_X(G(z)) = G(z)$ $\quad F_Z(z) = F_Y(z)$.Donc $Z \longrightarrow \mathcal{L}(0)$.

2)
```
function laplace;
var x:real;
begin    x:=random;
  if x<=1/2 then laplace:=ln(2*x)
              else laplace:=-ln(2*(1-x));
end;
```

Exercice 4

1) $f(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ te^{-t2/2} \geq 0 \text{ si } t \geq 0 \end{cases}$ donc f est positive sur $\mathbb{R}$

f est continue sur $]-\infty;0[$ (fonction nulle) et sur $]0;+\infty[$ (produit de fonctions continues).

$I(X) = \int_0^X t\exp(-t^2/2dt = \left[-\exp(-t^2/2)\right]_0^X = 1 - \exp(-X^2/2)$ $\quad \lim\limits_{X \to +\infty} I(X) = 1$. f est une densité de probabilité.

2) Si $Y \longrightarrow N(0,1)$ alors Y admet une variance et $V(Y) = 1$ $\quad E(Y^2) - E(Y)^2 = 1$ $\quad E(Y^2) = 1$

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2\exp(-t^2/2)dt = 1$ $\quad \int_{-\infty}^{+\infty} t^2\exp(-t^2/2)dt = \sqrt{2\pi}$

Par parité : $2\int_0^{+\infty} t^2\exp(-t^2/2)dt = \sqrt{2\pi}$ donc E(X) existe et $E(X) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$.

3) $\forall x < 0, F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = 0$

$\forall x \geq 0, F_X(x) = \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_0^x f(t)dt = 0 + 1 - e^{-x2/2}$

3) a) $\forall y \in \mathbb{R}$ $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y)$

_ si $y < 0$ $X^2 < y$ est impossible donc $F_Y(y) = 0$

_ $\forall y \geq 0$ $P(Y \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$

$\sqrt{y} \geq 0$ et $-\sqrt{y} \leq 0$ donc $P(Y \leq y) = 1 - \exp(-\sqrt{y}^2/2) - 0 = 1 - \exp(-y/2)$

donc $Y \longrightarrow \mathcal{E}(1/2)$.

b) $Y = X^2 \Leftrightarrow X = \sqrt{Y}$ (car $X \geq 0$) donc x:= sqrt(-2ln(1 – random));