

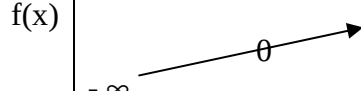
Exercice 1

1) a) si $x \geq 0$ $-x \leq 0$ donc $0 < e^{-x} \leq 1$ $-1 \leq -e^{-x} < 0$ $0 \leq 1 - e^{-x} < 1$ $1 - e^{-x} \in [0;1[$

si $x < 0$ $-x > 0$ $e^{-x} > 1$ $-e^{-x} < -1$ $1 - e^{-x} < 0$

OU : Posons $f(x) = 1 - e^{-x}$ alors $f'(x) = e^{-x} > 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f(x)	$-\infty$	0	1



Donc si $x < 0$, $1 - e^{-x} < 0$ et si $x \geq 0$, $1 - e^{-x} \in [0;1[$

b) $\forall z \in \mathbb{R}, Z \leq z \Leftrightarrow -\ln(1 - U) \leq z \Leftrightarrow \ln(1 - U) \geq -z \Leftrightarrow 1 - U \geq e^{-z} \Leftrightarrow -U \geq e^{-z} - 1$

$\Leftrightarrow U \leq 1 - e^{-z}$

Donc $F_Z(z) = F_U(1 - e^{-z})$

si $z \geq 0$, $1 - e^{-z} \in [0;1[$ donc $F_Z(z) = 1 - e^{-z}$

si $z < 0$, $1 - e^{-z} < 0$ donc $F_Z(z) = 0$ Donc $Z \longrightarrow \mathcal{E}(1)$

c) fonction expo : real;

begin

 expo := -ln(1 - random);

end;

Exercice 2

n:=0;

repeat

 begin

 x:=random;

 y:=a+(b-a)*random;

 n:=n+1;

 end;

until y>s;

write('gain : ', y - n*c);

Exercice 3

1) $\forall z \in \mathbb{R}, F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(G^{-1}(X) \leq z) = P(X \leq G(z))$ (G croissante sur $\mathbb{R}$)

$= F_X(G(z))$ Or $\forall z \in \mathbb{R}, G(z) \in [0;1]$, donc $F_X(G(z)) = G(z)$ $F_Z(z) = F_Y(z)$. Donc $Z \longrightarrow \mathcal{L}(0)$.

2) fonction laplace;

var x:real;

begin x:=random;

 if x<=1/2 then laplace:=ln(2*x)

 else laplace:=-ln(2*(1-x));

end;

Exercice 4

1) $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ te^{-t^2/2} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$ donc f est positive sur $\mathbb{R}$

f est continue sur $]-\infty;0[$ (fonction nulle) et sur $]0;+\infty[$ (produit de fonctions continues).

$I(X) = \int_0^X t \exp(-t^2/2) dt = [-\exp(-t^2/2)]_0^X = 1 - \exp(-X^2/2)$ $\lim_{X \rightarrow +\infty} I(X) = 1$. f est une densité de probabilité.

2) Si $Y \longrightarrow N(0,1)$ alors Y admet une variance et $V(Y) = 1$ $E(Y^2) - E(Y)^2 = 1$ $E(Y^2) = 1$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \exp(-t^2/2) dt = 1 \quad \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \exp(-t^2/2) dt = \sqrt{2\pi}$$

Par parité : $2 \int_0^{+\infty} t^2 \exp(-t^2/2) dt = \sqrt{2\pi}$ donc $E(X)$ existe et $E(X) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$.

$$3) \forall x < 0, F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = 0$$

$$\forall x \geq 0, F_X(x) = \int_{-\infty}^0 f(t) dt + \int_0^x f(t) dt = 0 + 1 - e^{-x^2/2}$$

$$3) a) \forall y \in \mathbb{R} F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y)$$

_ si $y < 0$ $X^2 < y$ est impossible donc $F_Y(y) = 0$

$$_ \forall y \geq 0 \quad P(Y \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$$

$$\sqrt{y} \geq 0 \text{ et } -\sqrt{y} \leq 0 \quad \text{donc } P(Y \leq y) = 1 - \exp(-\sqrt{y}^2/2) - 0 = 1 - \exp(-y/2)$$

donc $Y \longrightarrow \mathcal{E}(1/2)$.

$$b) Y = X^2 \Leftrightarrow X = \sqrt{Y} \text{ (car } X \geq 0) \text{ donc } x := \text{sqrt}(-2\ln(1 - \text{random}));$$