T.D. n°6 Simulation de variables aléatoires discrètes

Exercice 1 - EDHEC 2005

Un mobile se déplace sur les points à coordonnées entières d'un axe d'origine O

Au départ, le mobile est à l'origine. Le mobile se déplace selon la règle suivante : s'il est sur le point d'abscisse k à l'instant n, alors, à l'instant (n + 1) il sera sur le point d'abscisse (k + 1) avec la probabilité p ($0 < p < 1$) ou sur le point d'abscisse 0 avec la probabilité $1 - p$.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note X_n l'abscisse de ce point à l'instant n et l'on a donc $X_0 = 0$.

On prend p = 1/3. On rappelle que random(3) renvoie au hasard un entier de {0, 1, 2}.

Compléter le programme suivant pour qu'il simule l'expérience aléatoire étudiée et affiche la valeur prise par X_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
Program edhec2005 ;
Var k, n, u, X : integer ;
begin
  Readln(n) ;
  Randomize ;  X:=O;
  For k:=1 to n do
    begin
      u := random(3) ;
      if (u = 2) then X :=........
                 else X :=.......;
     end ;
  Writeln (X) ;end.
```

Exercice 2 - EML 2007

Soit Y une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $P(Y = n) = \left(1 - \frac{1}{e}\right)e^{-n}$

a) Montrer que la variable aléatoire Y + 1 suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre. En déduire l'espérance et la variance de Y .

b) Recopier et compléter le programme ci-dessous pour qu'il simule la variable aléatoire Y

```
program eml2007 ;
var y :integer ; u :real ;
begin
randomize ;
u :=random ; y :=... ;
while... do
... ... ...
writeln('y vaut ', y) ;
end.
```

Exercice 3 - EDHEC 2010

Une urne contient 3 boules numérotées de 1 à 3. Un tirage consiste à extraire au hasard une boule de l'urne puis à la remettre dans l'urne pour le tirage suivant.

On définit une suite de variables aléatoires $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de la manière suivante :

- Pour tout entier k non nul, X_k est définie après le $k^{\text{ème}}$ tirage
- On procède au 1^{er} tirage et X_1 prend la valeur du numéro de la boule obtenue à ce tirage.
- Après le $k^{\text{ème}}$ tirage ($k \in \mathbb{N}^*$) :

  Soit X_k a pris la valeur 1, dans ce cas on procède au $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage et X_{k+1} prend la valeur du numéro obtenu à ce $(k + 1)^{\text{ème}}$ tirage.

  Soit X_k à pris une valeur j, différente de 1, dans ce cas, on procède également au $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage et X_{k+1} prend la valeur j si la boule tirée porte le numéro j, et la valeur 1 sinon.

1) Reconnaître la loi de X_1.

2) Simulation informatique de l'expérience aléatoire décrite dans cette partie.

On rappelle que random(n) renvoie un entier compris entre 0 et n – 1.

Compléter le programme suivant pour qu'il simule l'expérience aléatoire décrite dans cette partie et pour qu'il affiche la valeur de la variable aléatoire X_k, l'entier naturel k étant entré au clavier par l'utilisateur.

```
Program simul;
Var i, k, X, tirage : integer;
begin
randomize;
readln(k);X:=random(3) + 1;
For i:=2 to k do begin
                tirage:=random(3)+1;
                if X = 1 then X : = …..
                        else if tirage<>X then X:=…..;
               end;
writeln(X);end.
```

On admet la loi de X_k est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(X_k = 1) = \frac{1}{2}\left(1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^k\right),\ P(X_k = 2) = P(X_k = 3) = \frac{1}{4}\left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^k\right)$$

3) a) Calculer l'espérance $E(X_k)$ de X_k.

b) Ecrire une fonction Pascal, noté esp, qui renvoie $E(X_k)$ à l'appel de esp(k).

Exercice 4 - EDHEC 2009

Dans cet exercice, p désigne un réel de]0;1[et on note q = 1 – p.

On considère une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé (Ω, A, P), suivant la loi géométrique de paramètre p.

1) On définit la variable aléatoire T de la façon suivante :

Pour tout ω de Ω tel que X(ω) est un entier naturel pair, on pose $T(\omega) = \dfrac{X(\omega)}{2}$, et, pour tout ω de Ω tel que X(ω) est un entier naturel impair, on pose $T(\omega) = \dfrac{1 + X(\omega)}{2}$.

a) Montrer que T prend des valeurs entières non nulles.

b) Réciproquement, justifier que tout entier naturel k non nul est élément de T(Ω) et en déduire que $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

c) Exprimer l'événement (T = k) en fonction de certains des événements (X = i), puis montrer que $\forall k \geq 1$, $P(T = k) = q^{2k-2}(1 - q^2)$.

2) On rappelle que la fonction random renvoie de façon uniforme un réel aléatoire de [0; 1[.
Compléter le programme suivant pour que, d'une part, il simule les lancers d'une pièce donnant "pile" avec la probabilité p et calculer la valeur prise par la variable aléatoire X égale au rang du premier "pile" obtenu lors de ces lancers (X suit bien la loi géométrique de paramètre p) et pour que, d'autre part, il calcule et affiche la valeur prise par T, la variable aléatoire T ayant été définie dans la question précédente.

```
Program edhec2009 ;
Var x, t, lancer : integer ;
Begin
  Randomize ; x :=0 ;
  Repeat lancer :=random ; x :=....... ; until(lancer <=p) ;
  If(x mod 2=0) then .... else.... ;
Writeln(t) ;End.
```