ECE2 - T.D. n°5 : Correction

Exercice 1 (u = 2) a une probabilité de 1/3.

```
 if (u = 2) then X := X+1;
                         else X := 0;
```

Exercice 2 a) Posons Z = Y+1 Y(Ω) = ℕ donc Z(Ω) = ℕ*.

$\forall k \geq 1$, $P(Z = k) = P(Y + 1 = k) = P(Y = k - 1) = \left(1 - \frac{1}{e}\right)\left(\frac{1}{e}\right)^{k-1} = \left(1 - \left(1 - \frac{1}{e}\right)\right)^{k-1} \times \frac{1}{e}$

Donc $Z \longrightarrow G(1 - 1/e)$.

$E(Z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{e}} = \frac{1}{\frac{e-1}{e}} = \frac{e}{e-1}$ $Y = Z - 1$ donc $E(Y) = E(Z) - 1 = \frac{e}{e-1} - \frac{e-1}{e-1} = \frac{1}{e-1}$

$V(Y) = V(Z) = \frac{\frac{1}{e}}{\left(\frac{e-1}{e}\right)^2} = \frac{e}{(e-1)^2}$

b) Si on considère Z comme le nombre d'essais pour avoir un succès lors d'épreuves de Bernoulli indépendantes, Y = Z – 1 est le nombre d'échecs avant le premier succès.
La probabilité d'un échec est 1/e.

```
program eml2007;
....  u:=random;y:=0;  while u<1/exp(1) do begin       ou : while random<1/exp(1) do y:=y+1;
                    y:=y+1;                                    (ou : random>1 – 1/exp(1))
                    u:=random;
                 end;
```

Exercice 3

1) `if x=1 then x:=tirage`   (si on avait 1, on prend le numéro de la boule tirée)
`else if tirage<>x then x:=1;` (si on n'a pas 1, x vaut 1 si la boule tirée est différente, et sinon, on ne change pas x).

2) $E(X_k) = 1 \times P(X_k = 1) + 2 \times P(X_k = 2) + 3 \times P(X_k = 3)$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^k + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^k + \frac{3}{4} - \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^k = \frac{7}{4} - \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^k$

```
 function esp(k:integer):real; var i:integer;     p:real;
begin  p:=1;  for i:=1 to k do p:=p*(-1/3);  esp:=7/4-3/4*p; end;
```

Exercice 4 1) si X(ω) est pair, alors il est divisible par 2, donc $T(\omega) = \frac{X(\omega)}{2}$ est un entier.

de plus $X(\omega) \geq 2$ donc $T(\omega) \geq 1$

si X(ω) est impair, alors X(ω) + 1 est pair, donc divisible par 2 donc $T(\omega) = \frac{X(\omega) + 1}{2}$ est un entier. De plus $X(\omega) \geq 1$ donc $X(\omega) + 1 \geq 2$ et $T(\omega) \geq 1$.

Donc T prend des valeurs entières non nulles.

b) si $k \in \mathbb{N}^*$ alors 2k aussi donc $P(X = 2k) > 0$ donc $P(T = k) > 0$

c) $(T = k) = (X = 2k) \cup (X = 2k - 1)$ (disjoints) donc $P(T = k) = q^{2k-1} \times p + q^{2k-2} \times p = q^{2k-2} \times p(1 + q) = q^{2k-2}(1 - q)(1 + q) = q^{2k-2}(1 - q^2)$

2)
```
program edhec2009;
   ...
  repeat lancer:=random;x:=x+1;until(lancer<=p);
  if (x MOD 2)=0 then t:=x div 2
              else t:=(x+1) div 2;...
```