T.D.4 ECE2 : Correction

1) $I = \int_0^1 \frac{dx}{2-x} = [-\ln(2-x)]_0^1 = -\ln(1) + \ln(2) = \ln(2)$

2) a) f est C^0 sur [0;1]. Donc la somme de Riemann $\frac{1-0}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$ converge vers $\int_0^1 f(x)dx$

S_n converge vers ln(2).

b) Pour que $\ln(2) - S_n \leq 10^{-3}$, il suffit que $\frac{1}{2n} \leq 10^{-3}$. $\frac{1}{2n} \leq 10^{-3} \Leftrightarrow 2n \geq 1000 \Leftrightarrow n \geq 500$.

c)
```
program td3;
var k:integer;     s,sn:real;
begin  s:=0;
for k:=0 to 499 do s:=s+1/(2 – k/500);
sn:=s/500;
writeln('Une valeur approchée de ln(2) … 10-3 près est',sn);readln;
end.
```
On trouve $\ln(2) \approx 0,693647\ldots$

3) a) $\forall x \in [0;1]\ f'(x) = -\frac{-1}{(2-x)^2} = \frac{1}{(2-x)^2}$

$0 \leq x \leq 1 \quad 0 \geq -x \geq -1 \quad 2 \geq 2-x \geq 1 \quad 4 \geq (2-x)^2 \geq 1$

$0 \leq \frac{1}{4} \leq \frac{1}{(2-x)^2} \leq 1$ Donc $\forall x \in [0;1],\ 0 \leq f'(x) \leq 1$

D'après l'inégalité des accroissements finis, $\forall x \in [0,1]$, $\forall y \in [0,1]$,
si $y \geq x \quad 0 \leq f(y) - f(x) \leq y - x$

b) Soit $n \geq 1$, et $k \in \{0, \ldots, n-1\}$,

$\forall x \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$, $x \geq \frac{k}{n}$ donc $0 \leq f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \leq x - \frac{k}{n}$

Par croissance de l'intégrale : $0 \leq \int_{k/n}^{(k+1)/n} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right)dx \leq \int_{k/n}^{(k+1)/n} \left(x - \frac{k}{n}\right)dx$

$$0 \leq \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(x)dx - \int_{k/n}^{(k+1)/n} f\left(\frac{k}{n}\right)dx \leq \left[\frac{\left(x - \left(\frac{k}{n}\right)\right)^2}{2}\right]_{k/n}^{(k+1)/n}$$

$$0 \leq \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(x)dx - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \frac{\left(\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n}\right)^2}{2} - 0$$

$$0 \leq \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(x)dx - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \frac{1}{2n^2}.$$

c) Par somme, on a donc :

$$0 \leq \sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(x)dx - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right) \leq \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2n^2}$$

$$0 \leq \sum_{k=0}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(x)dx - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq n \times \frac{1}{2n^2}$$

$$0 \leq \int_0^1 f(x)dx - S_n \leq \frac{1}{2n} \quad 0 \leq I - S_n \leq \frac{1}{2n}.$$