ECE2 T.D. n°4 – Valeur approchée d'une intégrale

On considère la fonction $f(x) = \dfrac{1}{2-x}$ sur [0;1] et on pose $I = \int_0^1 f(x)dx$

1) Déterminer la valeur de I.

2) a) Pour tout $n \geq 1$, on pose $S_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\dfrac{k}{n}\right)$.

Montrer que (S_n) converge et déterminer sa limite.

b) On admet que $\forall\, n \geq 1,\ 0 \leq I - S_n \leq \dfrac{1}{2n}$

A partir de quel rang est-on sûr que S_n est une valeur approchée de ln(2) à 10^{-3} près ?

c) Ecrire un programme Pascal qui calcule une valeur approchée de ln(2) à 10^{-3} près.

3) a) Montrer que $\forall (x,y) \in [0;1]$, si $y \geq x \quad 0 \leq f(y) - f(x) \leq y - x$

b) Montrer que $\forall\, n \geq 1$, $\forall\, k \in \{0, \ldots, n-1\}$,

$$0 \leq \int_{k/n}^{(k+1)/n} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right)dx \leq \int_{k/n}^{(k+1)/n} \left(x - \frac{k}{n}\right)dx$$

puis que : $$0 \leq \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(x)dx - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \frac{1}{2n^2}$$

c) Par somme, en déduire que $\forall\, n \geq 1,\ 0 \leq I - S_n \leq \dfrac{1}{2n}$

ECE2 T.D. n°4 – Valeur approchée d'une intégrale

On considère la fonction $f(x) = \dfrac{1}{2-x}$ sur [0;1] et on pose $I = \int_0^1 f(x)dx$

1) Déterminer la valeur de I.

2) a) Pour tout $n \geq 1$, on pose $S_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\dfrac{k}{n}\right)$.

Montrer que (S_n) converge et déterminer sa limite.

b) On admet que $\forall\, n \geq 1,\ 0 \leq I - S_n \leq \dfrac{1}{2n}$

A partir de quel rang est-on sûr que S_n est une valeur approchée de ln(2) à 10^{-3} près ?

c) Ecrire un programme Pascal qui calcule une valeur approchée de ln(2) à 10^{-3} près.

3) a) Montrer que $\forall (x,y) \in [0;1]$, si $y \geq x \quad 0 \leq f(y) - f(x) \leq y - x$

b) Montrer que $\forall\, n \geq 1$, $\forall\, k \in \{0, \ldots, n-1\}$,

$$0 \leq \int_{k/n}^{(k+1)/n} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right)dx \leq \int_{k/n}^{(k+1)/n} \left(x - \frac{k}{n}\right)dx$$

puis que : $$0 \leq \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(x)dx - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \frac{1}{2n^2}$$

c) Par somme, en déduire que $\forall\, n \geq 1,\ 0 \leq I - S_n \leq \dfrac{1}{2n}$.