

**Exercice 1 (ESC 2008)**

Un joueur A dispose d'une pièce qui a la propriété de faire PILE avec la probabilité  $1/3$ .

Un joueur B dispose d'une pièce qui a la propriété de faire PILE avec la probabilité  $p \in ]0, 1[$ .

Les résultats des lancers de ces pièces seront toujours supposés indépendants.

On veut programmer en Pascal le lancer simultané des deux pièces par les joueurs A et B.

En utilisant la fonction `random`, recopier et compléter la fonction suivante pour qu'elle simule ce lancer et renvoie 0 si les résultats de A et B sont identiques et 1 s'ils sont différents.

```

fonction lancer(p :real) :integer ;
var a,b :char ;
begin
if (.....) then A := 'P' else A := 'F' ;
if (.....) then B := 'P' else B := 'F' ;
if (.....) then lancer := 0 else lancer := 1 ;
end;

```

**Exercice 2 (EDHEC 2005)**

Un mobile se déplace sur les points à coordonnées entières d'un axe d'origine O

Au départ, le mobile est à l'origine. Le mobile se déplace selon la règle suivante : s'il est sur le point d'abscisse  $k$  à l'instant  $n$ , alors, à l'instant  $(n + 1)$  il sera sur le point d'abscisse  $(k + 1)$  avec la probabilité  $p$  ( $0 < p < 1$ ) ou sur le point d'abscisse 0 avec la probabilité  $1 - p$ .

Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , on note  $X_n$  l'abscisse de ce point à l'instant  $n$  et l'on a donc  $X_0 = 0$ .

On prend  $p = 1/3$ . On rappelle que `random(3)` renvoie au hasard un entier de  $\{0, 1, 2\}$ .

Compléter le programme suivant pour qu'il simule l'expérience aléatoire étudiée et affiche la valeur prise par  $X_n$  pour une valeur de  $n$  entrée par l'utilisateur.

Program edhec2005 ;

Var k, n, u, X : integer ;

begin

  Readln(n) ;

  Randomize ; X:=0;

  For k:=1 to n do

    begin

      u := random(3) ;

      if (u = 2) then X :=.....  
          else X :=.....;

    end ;

  Writeln (X) ;end.

**Exercice 3 - EML 2007**

Soit Y une variable aléatoire discrète à valeurs dans  $\mathbb{N}$  telle que la variable aléatoire  $Y + 1$

suit la loi géométrique de paramètre  $p = 1 - \frac{1}{e}$ .

Recopier et compléter le programme ci-dessous pour qu'il simule la variable aléatoire Y

program eml2007 ;

var y :integer ; u :real ;

begin

  randomize ;

  u :=random ; y :=... ;

  while... do

    ... ..

  writeln('y vaut ', y) ;

end.

#### Exercice 4 (EDHEC 2007)

On lance une pièce équilibrée. (la probabilité d'obtenir "pile" et celle d'obtenir "face" étant toutes deux égales à  $1/2$ ) et on note  $Z$  la variable aléatoire égale au rang du lancer où l'on obtient le premier "pile".

Après cette série de lancers, si  $Z$  a pris la valeur  $k$  ( $k \in \mathbb{N}^*$ ), on remplit une urne de  $k$  boules numérotées  $1, 2, \dots, k$ , puis on extrait au hasard une boule de cette urne.

On note  $X$  la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée après la procédure décrite ci-dessus. On décide de coder l'événement <obtenir un "pile"> par 1 et l'événement <obtenir un "face"> par 0.

On rappelle que la fonction random renvoie, pour un argument  $k$  de type integer (où  $k$  désigne un entier supérieur ou égal à 1) un entier aléatoire compris entre 0 et  $k - 1$ .

a) Compléter le programme suivant pour qu'il affiche la valeur prise par  $Z$  lors de la première partie de l'expérience décrite ci-dessus.

```
Program edhec 2007 ;
Var z, hasard : integer ;
begin
randomize ; z :=0 ;
repeat
z :=..... ; hasard :=..... ; until (hasard=1) ;
writeln(z) ;end.
```

b) Quelle instruction faut-il rajouter avant la dernière ligne de ce programme pour qu'il simule l'expérience aléatoire décrite dans ce problème et affiche la valeur prise par la variable aléatoire  $X$  ?

#### Exercice 5 (HEC 2000)

On dispose de deux jetons A et B que l'on peut placer dans deux cases  $C_0$  et  $C_1$ , et d'un dispositif permettant de tirer au hasard et de manière équiprobable, l'une des lettres a, b ou c. Au début de l'expérience, les deux jetons sont placés dans  $C_0$ . On procède alors à une série de tirages indépendants de l'une des trois lettres a, b ou c.

A la suite de chaque tirage, on effectue l'opération suivante:

- si la lettre a est tirée, on change le jeton A de case,
- si la lettre b est tirée, on change le jeton B de case,
- si la lettre c est tirée, on ne change pas le placement des jetons.

On suppose qu'il existe un espace probabilisé dont la probabilité est notée  $P$ , qui modélise cette expérience et que l'on définit deux suites de variables aléatoires sur cet espace,  $(X_n)_{n \geq 0}$  et  $(Y_n)_{n \geq 0}$ , décrivant les positions respectives de A et B, en posant :

$X_0 = Y_0 = 0$ , et pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $X_n = 0$  si à l'issue de la  $n^{\text{ième}}$  opération, le jeton A se trouve dans  $C_0$  et  $X_n = 1$  s'il se trouve dans  $C_1$ ; de même,  $Y_n = 0$  si à l'issue de la  $n^{\text{ième}}$  opération, le jeton B se trouve dans  $C_0$  et  $Y_n = 1$  s'il se trouve dans  $C_1$ .

Ecrire un programme en Turbo-Pascal permettant de simuler l'expérience, qui lira un entier  $N$  entré au clavier, représentant le nombre de tirages à effectuer, et qui affichera à l'écran la liste des couples observés  $(X_n, Y_n)$  pour  $1 \leq n \leq N$ .

Ce programme utilisera la fonction RANDOM qui renvoie, pour un argument  $m$  de type INTEGER, un nombre entier de l'intervalle  $[0, m - 1]$ , tiré au hasard et de manière équiprobable. (Cette fonction doit être initialisée par la commande RANDOMIZE)