# Soutien ECE2 : Réduction de matrices

## 1. Rappels matrices et bases

***Matrice d'un endomorphisme dans une base :***
Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E. Soient $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

$A = M_B(u)$ est la matrice $\quad A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u(e_1) & \ldots & u(e_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} \ldots & & \ldots \\ & & \\ \ldots & & \ldots \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} e_1 \\ \ldots \\ e_n \end{array}$

***Matrice de passage :***
Soit E un espace vectoriel et $B = (e_1, \ldots, e_n)$, $B' = (e_1', \ldots, e_n')$ deux bases de E.

$P = P_{B \to B'}$ est la matrice $P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e_1' & \ldots & e_n' \end{array} \\ \begin{pmatrix} \ldots & & \ldots \\ & & \\ \ldots & & \ldots \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} e_1 \\ \ldots \\ e_n \end{array}$

***Formule de changement de base :***
Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E. Soient B et B' deux bases de E.
On note :

$$A = M_B(u) \qquad A' = M_{B'}(u) \qquad P = P_{B \to B'}.$$

Alors

$$\mathbf{A = P\,A'\,P^{-1}}$$

***Endomorphisme canoniquement associé :***
Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.

On pose $E = M_{n,1}(\mathbb{R})$. La base canonique est la base $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \ldots \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ \ldots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Soit u l'endomorphisme de E défini par : $u(X) = AX$.
Alors u est l'endomorphisme canoniquement associé à A. Et $M_B(u) = A$.

On peut donc toujours considéré A comme la matrice d'un endomorphisme dans une base.

## 2. Diagonalisation

### *1) Comment trouver les valeurs propres de A ?*

_ soit on nous donne les valeurs propres, ou les vecteurs propres, et il suffit de vérifier.
_ soit A est triangulaire, et il suffit de les lire sur la diagonale
_ soit on nous donne un polynôme annulateur, et il suffit de tester chacune de ses racines.
_ soit on cherche à quelle(s) condition(s) sur $\lambda$, la matrice $A - \lambda I$ n'est pas inversible (ou le système $AX - \lambda X$ n'est pas de Cramer).
_ en particulier 0 est valeur propre si A n'est pas inversible (u non injectif, non surjectif, non bijectif)

### *2) Comment montrer qu'une matrice est diagonalisable ?*

_ si A a n valeurs propres distinctes, alors A est diagonalisable
_ si la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à n, alors A est diagonalisable.
_ si A est symétrique, alors elle est diagonalisable.

### *3) Comment montrer que $A = PDP^{-1}$ ? (ou $PTP^{-1}$) ?*

*Dans le cas où A est diagonalisable :*

_ on sait que des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes forment une famille libre. En ajoutant les bases des différents sous-espaces propres, on obtient donc une base B' de E. (et il n'y a pas besoin de montrer que c'est une base !).

_ on a : $A = M_B(u)$. On note $P = P_{B \to B'}$ et $D = M_{B'}(u)$.
D'après la formule de changement de base : $A = PDP^{-1}$.
Comment B' est une base de vecteurs propres, D est une matrice diagonale.

*Dans le cas où A n'est pas diagonalisable :*

_ l'énoncé nous aide à construire une base B'
_ si on note $T = M_{B''}(u)$, T est en général triangulaire, et on a, d'après la formule de changement de base : $A = PTP^{-1}$.

### 4) A quoi sert $A = PDP^{-1}$ (ou $PTP^{-1}$) ?

_ calculer $A^n$ : $A^n = (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1}$

_ calculer $A^{-1}$ : $A^{-1} = (PDP^{-1})^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$

_ chercher à résoudre une équation matricielle : changement d'inconnue, avec $N = P^{-1}MP$.
Ex : $AM = MA \Leftrightarrow D(P^{-1}MP) = (P^{-1}MP)D)$, $M^2 = A$, $AM = - AM$, …