

Soutien ECE2 : Vendredi 30 Mars

Exercice 1

On considère une urne contenant 2 boules vertes et 1 boule rouge.

On répète indéfiniment l'expérience suivante :

On tire au hasard une boule de l'urne.

_ si elle est rouge, on la remet dans l'urne

_ si elle est verte, on ne la remet pas dans l'urne.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules vertes restantes après n étapes.

On note également $Y_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \end{pmatrix}$.

1) Pour tout $i \in \{0, 1, 2\}$, pour tout $j \in \{0, 1, 2\}$, déterminer $P_{(X_n=i)}(X_{n+1} = j)$.

2) Déterminer une matrice $M \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $Y_{n+1} = MY_n \forall n \in \mathbb{N}$.

3) Exprimer Y_n en fonction de M , n et Y_0 .

Exercice 2

On considère une pièce dont la probabilité de faire face est $p \in]0;1[$. On note $q = 1 - p$.

Un joueur A lance cette pièce jusqu'à faire face. Soit U la variable aléatoire égale au nombre de lancers.

Un joueur B lance cette pièce jusqu'à faire face. Soit V la variable aléatoire égale au nombre de lancers.

1) a) Déterminer la loi de U , $E(U)$, $V(U)$. De même pour V .

b) Pour $k \in \mathbb{N}$, déterminer $P(U \leq k)$.

2) On note $W = U + V$.

a) Déterminer $E(W)$.

b) Pour tout $k \geq 2$, déterminer $P(W = k)$.

3) On note $X = V - U$.

a) Déterminer $P(X = 0)$.

b) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, déterminer $P(X = k)$.

3) On note $Y = \max(X, V)$.

a) Pour $k \in \mathbb{N}$, déterminer $P(Y \leq k)$.

b) Pour $k \geq 1$, exprimer $P(Y = k)$ en fonction de $P(Y \leq k - 1)$ et $P(Y \leq k)$.

c) En déduire la loi de Y .

4) On note $Z = \min(X, Y)$.

a) Pour $k \in \mathbb{N}$, déterminer $P(Z > k)$.

b) Pour $k \geq 1$, exprimer $P(Z = k)$ en fonction de $P(Z > k - 1)$ et $P(Z > k)$.

c) En déduire la loi de Z .