ECE2 : Correction Soutien Vendredi 30 Mars

Exercice 1

1) $(X_n = 0)$: il ne reste qu'une boule rouge.
2) $P_{(Xn = 0)}(X_{n+1} = 0) = 1$ $P_{(Xn = 0)}(X_{n+1} = 1) = P_{(Xn = 0)}(X_{n+1} = 2) = 0$

$(X_n = 1)$: il reste une rouge et une verte

$P_{(Xn = 1)}(X_{n+1} = 0) = P_{(Xn = 1)}(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{2}$ $\quad P_{(Xn = 1)}(X_{n+1} = 2) = 0.$

$(X_n = 2)$: il reste une rouge et deux vertes.

$P_{(Xn = 2)}(X_{n+1} = 0) = 0$ $\quad P_{(Xn = 2)}(X_{n+1} = 1) = \frac{2}{3}$ $\quad P_{(Xn = 2)}(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{3}.$

2) $(X_n = 0), (X_n = 1), (X_n = 2)$ est un S.C.E. ou ARBRE

D'après la formule des probabilités totales :

$$P(X_{n+1} = 0) = \sum_{i=0}^{2} P(X_n = i)P_{(Xn = i)}(X_{n+1} = 0) = P(X_n = 0) + \frac{1}{2}P(X_n = 1).$$

De même, $P(X_{n+1} = 1) = P(X_n = 1) \times \frac{1}{2} + P(X_n = 2) \times \frac{2}{3}$ $\qquad P(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{3}P(X_n = 2).$

$$\text{Donc } Y_{n+1} = \begin{pmatrix} P(X_{n+1} = 0) \\ P(X_{n+1} = 1) \\ P(X_{n+1} = 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) + 1/2 \times P(X_n = 1) \\ 1/2 \times P(X_n = 1) + 2/3 \times P(X_n = 2) \\ 1/3\, P(X_n = 2) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \end{pmatrix} = MY_n \text{ avec } M = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

3) Donc $Y_n = M^n Y_0$ (par récurrence).

Exercice 2

1) a) U est le premier succès lors de lancers indépendants. La probabilité du succès est p.

Donc $U \longrightarrow G(p)$. $E(U) = \frac{1}{p}$. $V(U) = \frac{q}{p^2}$. De même $V \longrightarrow G(p)$. $E(V) = \frac{1}{p}$ $\quad V(U) = \frac{q}{p^2}$;

b) $P(U > k) = P(\text{les k premiers lancers sont des piles}) = q^k$

$P(U \leq k) = 1 - P(U > k) = 1 - q^k$.

2) $\forall\, k \geq 2$ $\quad P(W = k) = \sum_{i=1}^{k-1} P((U = i) \cap (V = k - i))$

$= \sum_{i=1}^{k-1} P(U = i)P(V = k - i)$ (U, V indépendantes) $= \sum_{i=1}^{k-1} q^{i-1}pq^{k-i-1}p = \sum_{i=1}^{k-1} p^2q^{k-2} = p^2q^{k-2}(k - 1).$

3) a) $E(X) = E(U) - E(V) = 0$ $\quad V(X) = V(U - V) = V(U) + V(-V) = V(U) + (-1)^2V(V) = 2q/p^2$

b) $P(X = 0) = P(U = V) = \sum_{i=1}^{+\infty} P((U = i) \cap (V = i)) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(U = i)P(V = i)$ (U, V indép.)

$$= \sum_{i=1}^{+\infty} q^{2i-2}p^2 = p^2 \sum_{i=1}^{+\infty} (q^2)^{i-1} = p^2 \sum_{j=0}^{+\infty} (q^2)^j = \frac{p^2}{1 - (1 - p)^2} = \frac{p^2}{2p - p} = \frac{p}{2 - p}$$

c) si $k \geq 0$ $\quad P(X = k) = \sum_{i=1}^{+\infty} P((U = i) \cap (V = k + i)) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(U = i)P(V = k + i)$

$$\sum_{i=1}^{+\infty} p^2\, q^{2i-2+k} = q^k \sum_{i=1}^{+\infty} p^2q^{2i-2} = q^k \times \frac{p}{2 - p}.$$

4) a) $(Y \leq k) = (U \leq k) \cap (V \leq k)$ U, V indépendantes donc $P(Y \leq k) = P(U \leq k)P(V \leq k) = (1 - q^k)^2$

b) $P(Y = k) = P(Y \leq k) - P(Y \leq k - 1) = (1 - q^k)^2 - (1 - q^{k-1})^2$

5) a) $(Z > k) = (U > k) \cap (V > k)$ donc $P(Z > k) = P(U > k)P(V > k) = q^{2k}$

b) $P(Z = k) = P(Z > k - 1) - P(Z > k) = q^{2(k-1)} - q^{2k} = (q^2)^{k-1}(1 - q^2)$. Donc $Z \longrightarrow G(1 - q^2)$.