Soutien ECE2
Intégrales impropres - Variables à densité

1) f définie sur $[a; +\infty[$. Pour montrer que $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est convergente, plusieurs solutions :

_ $f(t) = \frac{1}{t^\alpha}$ avec $\alpha > 1$

_ f positive et $f(t) \sim_{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}$ avec $\alpha > 1$

_ f positive et $f(t) =_{+\infty} o\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)$ avec $\alpha > 1$ (en particulier si $\lim\limits_{t \to +\infty} t^2 f(t) = 0$, $f(t) =_{+\infty} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

_ on reconnaît $\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t}dt$, $\int_0^{+\infty} t\lambda e^{-\lambda t}dt$ ou $\int_0^{+\infty} t\lambda e^{-\lambda t}dt$ et on utilise densité, espérance, variance de la loi $\mathcal{E}(\lambda)$, ou l'équivalent pour la loi normale.

_ on montre que $\int_a^X f(t)dt$ admet une limite finie quand X tend vers $+\infty$.

2) Pour montrer que $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une densité de probabilité, il faut montrer que :

_ f est positive sur $\mathbb{R}$

_ f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut être en un nombre fini de points

_ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge et vaut 1.

3) X est une V.A.R., dont on connaît F_X. Montrer que X est une V.A.R. à densité.

_ F_X est une fonction de répartition, donc est croissante de 0 à 1.

Il reste à montrer que :

_ F_X est continue sur $\mathbb{R}$.

_ F_X est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en un nombre fini de points

Dans ce cas, une densité f de X est définie par : $f = F_X'$ (sauf points où F_X n'est pas C^1).

4) X est une V.A.R. de densité f. Montrer que X admet une espérance et calculer E(X).

X admet une espérance si $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ est convergente. Dans ce cas, $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$.

5) X est une V.A.R. de densité f et d'espérance E(X). Montrer que X admet une variance et calculer V(X).

X admet un moment d'ordre 2 si $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx$ est convergente.

Dans ce cas, $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx$, et $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.

6) X est une V.A.R. de densité f. On pose Y = g(X). Déterminer la loi de Y.

_ On cherche la fonction de répartition F_Y :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(g(X) \leq x)$

_ on résout l'inéquation $g(X) \leq x$, pour trouver $X \leq h(x)$ (ou $h(x) \leq X$, ou $h(x) \leq X \leq i(x)$ …).

_ on trouve ainsi $F_Y(x)$ en fonction de $F_X(h(x))$ ou ...

_ si F_X est définie par morceaux, on étudie les différentes positions de h(x) pour trouver la valeur de $F_Y(x)$.

_ enfin, on reconnaît une loi usuelle, ou on peut utiliser la question 3 pour trouver une densité de Y (si elle existe).