Fiche ECE2 : Variables aléatoires discrètes

1. Généralités (X est une V.A.R., avec $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$)

Loi de X : Ensemble des $P(X = x_i)$, pour $i \in I$ (ou $P(X = k)$, $k \in X(\Omega)$ si $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$), donné par un tableau si peu de valeurs ou par une formule

Fonction de répartition : $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = P(X \leq x)$

(si $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$, $P(X = k) = P(X \leq k) - P(X \leq k-1)$, $P(X \leq k) = \sum_{i=0}^{k} P(X = i)$)

Espérance : Si la série est absolument convergente, X admet une espérance, et

$$E(X) = \sum_{i \in I} x_i \times P(X = x_i)$$

Théorème de transfert : Si la série est absolument convergente, $E(g(X)) = \sum_{i \in I} g(x_i) \times P(X = x_i)$

Moment d'ordre r : Si existence, $m_r(X) = E(X^r)$

Variance / Ecart-typr : Si existence, $V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$, $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Formule de Huygens : Si existence, $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

Transformation affine : Si existence, $E(aX + b) = aE(X) + b$ $\quad V(aX + b) = a^2V(X)$.

2. Lois usuelles

Nom	Situation	$X(\Omega)$	$P(X = k)$	$E(X)$	$V(X)$
Uniforme $U([[1;n]])$	Equiprobabilité	$\{1, \ldots, n\}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
Bernoulli $B(1,p)$	succès de proba p X = 1 si succès X = 0 sinon	$\{0,1\}$	$P(X=0) = 1-p$ $P(X = 1) = p$	p	$p(1-p)$
Binomiale $B(n,p)$	n épreuves indépendantes X = nbre de succès	$\{0, \ldots, n\}$	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
Hypergéométrique $H(N,n,p)$	n éléments distincts choisis dans N, dont pN de type A X = nbre d'éléments de type A choisis	$0 \leq k \leq Np$ $0 \leq n-k \leq N - Np$	$\frac{\binom{pN}{k}\binom{N-pN}{n-k}}{\binom{N}{n}}$	np	$np(1-p)$ $\times (N-n)$ $/(N-1)$
Poisson $P(\lambda)$		$\mathbb{N}$	$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$	λ	λ
Géométrique $G(p)$	épreuves indépendantes X = premier succès	$\mathbb{N}^*$	$(1-p)^{k-1}p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$