Soutien ECE2 : Couples de variables aléatoires

1. Couples de V.A.R.

Soit X et Y deux V.A.R. avec $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j, j \in J\}$

Loi conjointe : L'ensemble des $P((X = x_i) \cap (Y = y_j))$, $i \in I, j \in J$.

Lois conditionnelles : L'ensemble des $P_{(X = xi)}(Y = y_j)$ ou l'ensemble des $P_{(Y = yj)}(X = x_i)$, $i \in I, j \in J$.

Lois marginales : De X : L'ensemble des $P(X = x_i)$, $i \in I$.
De Y : L'ensemble des $P(Y = y_j)$, $j \in J$.

Liens : $P\big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\big) = P(X = x_i) \times P_{(X = xi)}(Y = y_j) = P(Y = y_j) \times P_{(Y = yj)}(X = x_i)$,

$$P(X = x_i) = \sum_{j \in J} P((X = x_i) \cap (Y = y_j)) \qquad P(Y = y_j) = \sum_{i \in I} P((X = x_i) \cap (Y = y_j))$$

Covariance : $\text{cov}(X, Y) = E\big((X - E(X))(Y - E(Y))\big)$
$= E(XY) - E(X)E(Y)$ avec $E(XY) = \sum_{i \in I, j \in J} x_i \times y_j \times P\big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\big)$

Variables indépendantes :
X, Y indépendantes $\Leftrightarrow \forall i \in I, \forall j \in J, P\big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\big) = P(X = x_i) \times P(Y = y_j)$

Si X et Y sont indépendantes, cov(X, Y) = 0

2. Somme, différence, max, min de V.A.R.D.

Loi : si $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ et $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(X + Y = k) = \sum_{i=0}^{k} P\big((X = i) \cap (Y = k - i)\big)$

Espérance : $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

Variance : $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2\text{cov}(X, Y)$
(si X, Y indépendantes, $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$).

Somme lois de Bernoulli : Si $X_1, \dots, X_n$ V.A.R. <u>indépendantes</u> qui suivent la même loi $B(p)$
alors $X = X_1 + \dots + X_n \longrightarrow B(n,p)$

Somme lois binomiale : Si $X_1 \longrightarrow B(n_1,p)$, $X_2 \longrightarrow B(n_2, p)$ et X_1, X_2 <u>indépendantes</u>,
alors $X = X_1 + X_2 \longrightarrow B(n_1 + n_2, p)$.

Somme lois de Poisson : Si $X_1 \longrightarrow P(\lambda_1)$, $X_2 \longrightarrow P(\lambda_2)$ et X_1, X_2 <u>indépendantes</u>,
alors $X = X_1 + X_2 \longrightarrow P(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Différence : Si $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ et $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}$:

$$P(Y - X = 0) = P(Y = X) = \sum_{k} P((X = k) \cap (Y = k))$$

$$\text{si } n \in \mathbb{N},\ P(Y - X = n) = P(Y = X + n) = \sum_{k} P((X = k) \cap (Y = n + k))$$

Maximum, minimum : $(\max(X, Y) \leq k) = (X \leq k) \cap (Y \leq k)$ $\quad (\min(X,Y) \geq k) = (X \geq k) \cap (Y \geq k)$