ECE2 : Fiche Réduction des endomorphismes / des matrices

Introduction : Soit E un espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B}$ une base de E.
_ si u est un endomorphisme de E, on pose $A = M_B(u)$.
Alors : si x a pour coordonnées X dans la base $\mathcal{B}$, u(x) a pour coordonnées AX.
_ si $A \in M_n(\mathbb{R})$, en posant $E = M_{n,1}(\mathbb{R})$, on considère l'endomorphisme u canoniquement associé défini par : $u : \begin{cases} E \longrightarrow E \\ A \longmapsto AX \end{cases}$

1. Eléments propres

1.1 Valeur propre

Valeur propre (v.p.) : Soit $\lambda \in \mathbb{R}$
λ est une valeur propre de u (ou de A)
$\Leftrightarrow$ il existe $x \in E$, avec $x \neq 0$ tel que $u(x) = \lambda x$
$\Leftrightarrow$ il existe $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX = \lambda X$
$\Leftrightarrow$ le système $AX = \lambda X$ ($\Leftrightarrow (A - \lambda I)X = 0$) n'est pas un système de Cramer
$\Leftrightarrow$ la matrice $A - \lambda I$ n'est pas inversible
$\Leftrightarrow \ker(u - \lambda id_E) \neq \{0\}$
$\Leftrightarrow u - \lambda id_E$ n'est pas injectif $\Leftrightarrow u - \lambda id_E$ n'est pas surjectif $\Leftrightarrow u - \lambda id_E$ n'est pas bijectif

Remarques : _ En particulier, pour $\lambda = 0$:
0 est valeur propre $\Leftrightarrow$ il existe $x \neq 0$ tel que $u(x) = 0$
$\Leftrightarrow$ il existe $X \neq 0$ tel que $AX = 0$
$\Leftrightarrow$ le système $AX = 0$ n'est pas un système de Cramer
$\Leftrightarrow$ A n'est pas inversible
$\Leftrightarrow \ker(u) \neq \{0\}$
$\Leftrightarrow$ u n'est pas injectif $\Leftrightarrow$ u n'est pas surjectif $\Leftrightarrow$ u n'est pas bijectif
_ si A est une matrice triangulaire, ses valeurs propres sont les coefficients de sa diagonale (sans forcément la multiplicité).
_ l'ensemble des valeurs propres de A (de u) est appelé le spectre de A (de u).

Polynôme annulateur : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.
On dit que P est un polynôme annulateur de u si $P(u) = 0$ ($\Leftrightarrow \forall\, x \in E, P(u(x)) = 0$)
On dit que P est un polynôme annulateur de A si $P(A) = 0$

Propriété
Si P est un polynôme annulateur de u (de A) alors toute valeur propre de u (de A) est une racine de P. (Les racines du polynome annulateur sont des racines possibles de u (de A)).

1.2 Vecteur propre / Sous-espace propre

Définition :
Soit λ une v. p. de u. $x \in E$ est un vecteur propre (V.P.)de u associé à λ si : $\begin{cases} x \neq 0 \\ u(x) = \lambda x \end{cases}$
Soit λ une v. p. de A. $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ est un vecteur propre de A associé à λ si : $\begin{cases} X \neq 0 \\ AX = \lambda X \end{cases}$

Définition :
Soit λ une v.p. de u. Le sous-espace propre de u associé à λ est $E_\lambda = \ker(u - \lambda id_E)$
Soit λ une v.p. de A. Le sous-espace propre de A associé à λ est $E_\lambda = \{X \in M_{n,1}(\mathbb{R}), AX = \lambda X\}$

Remarque : Les sous-espaces propres de u sont des sous-espaces vectoriels de E, stables par u.

Propriété :
Des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes forment une famille libre.
(Si on choisit des familles libres $B_1, \dots, B_p$ dans les sous-espaces propres $E_{\lambda 1}, \dots, E_{\lambda p}$, alors $B = B_1 \cup \dots \cup B_p$ est une famille libre de E).

2. Diagonalisation

Définition : u (ou A) est diagonalisable s'il existe une base de vecteurs propres

Propriétés :
_ u (ou A) est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à n.
_ si u (ou A) a n valeurs propres distinctes, alors u (A) est diagonalisable
_ toute matrice symétrique est diagonalisable

Application :
Si u est diagonalisable.
Appelons $\mathcal{B}' = (e_1', \dots, e_n')$ la base de vecteurs propres et $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ les valeurs propres correspondantes. Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
Alors la matrice de u dans B' est diagonale, et ses coefficients diagonaux sont les valeurs propres.

C'est-à-dire : $A = PDP^{-1}$ où $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \dots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

Schéma d'un exercice de concours :

_ Recherche des valeurs propres de A : souvent aidé (matrice triangulaire, polynôme annulateur) ou assez simple _ Recherche des vecteurs propres correspondants. _ si A est diagonalisable, $A = PDP^{-1}$, où : $\begin{cases} \text{P : matrice de passage dans la base de V.P.} \\ \text{D : matrice diagonale contenant les v.p.} \end{cases}$ _ si A n'est pas diagonalisable $A = PTP^{-1}$, où : $\begin{cases} \text{P : matrice de passage dans une base adaptée donnée dans l'énoncé} \\ \text{T : matrice dans la base adaptée, plus simple que A, en général triangulaire} \end{cases}$

La forme $A = PDP^{-1}$ permet ensuite de :
_ calculer facilement A^n
_ chercher les matrices M tels que AM = MA, ou $M^2 = A$, ou …