ECE2 : Fiche Bases, matrices et endomorphismes

1. Bases et dimension

Définition : Soit $\mathcal{E}$ un espace vectoriel et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une famille de E.
$\mathcal{B}$ est une **base** de $\mathcal{E}$ si c'est une **famille libre et génératrice**.

Bases canoniques :

_ de $\mathbb{R}^n$ ou $M_{n,1}(\mathbb{R})$: $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, …,$e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \ldots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (n vecteurs)

_ de $M_{n,p}(\mathbb{R})$: $e_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & & & \ldots \\ \ldots & & & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 \end{pmatrix}$, etc… ($n \times p$ vecteurs)

_ de $\mathbb{R}_n[X]$: $e_0 = 1$, $e_1 = X$, $e_2 = X^2$, …, $e_n = X^n$ (n + 1 vecteurs)

Propriété :
Toutes les bases d'un espace vectoriel $\mathcal{E}$ ont le même cardinal. Il est appelé dimension de $\mathcal{E}$.

Donc $\dim(\mathbb{R}^n) = \dim(M_{n,1}(\mathbb{R})) = n$, $\dim(M_{n,p}(\mathbb{R})) = n \times p$, $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n + 1$

Propriété :
Soit $\mathcal{E}$ un espace vectoriel de dimension n.
Alors **toute famille libre à n éléments est une base de $\mathcal{E}$**.

Coordonnées : Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de $\mathcal{E}$. Alors tout élément X de $\mathcal{E}$ s'écrit de manière unique $X = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_n e_n$.
où $(\lambda_1, \ldots., \lambda_n)$ sont des réels appelés coordonnées de X dans la base $\mathcal{B}$.

Matrice de passage :
Définition

Soit $\mathcal{E}$ un espace vectoriel et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de $\mathcal{E}$.
Soit $\mathcal{C} = (f_1, \ldots, f_n))$ une famille à n éléments de $\mathcal{E}$.
On appelle matrice de passage de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{C}$ la matrice, notée $P_{\mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}}$ qui contient en colonnes les coordonnées de $f_1, \ldots, f_n$ dans la base $\mathcal{B}$.

Propriété :
La famille $\mathcal{C}$ est une **base de $\mathcal{E}$** si et seulement si **$P_{\mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}}$ est inversible**.
Dans ce cas, $P_{\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{B}} = (P_{\mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}})^{-1}$

Propriété
Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ deux bases de $\mathcal{E}$. Soit $x \in \mathcal{E}$.
Si X et X' sont les matrices colonnes contenant les coordonnées de x dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, alors : **X = PX'**

2. Applications linéaires

Définition: Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux espaces vectoriels et f : $\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$.
f est une application linéaire si et seulement si :
$\forall$ X, X' $\in \mathcal{E}$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} f(X + X') = f(X) + f(X') \\ f(\lambda X) = \lambda f(X) \end{cases}$

_ si $\mathcal{F} = \mathcal{E}$, f est un **endomorphisme**
_ si f est bijective, f est un **isomorphisme**
_ si $\mathcal{F} = \mathcal{E}$, et si f est bijective, f est un **automorphisme**.

Noyau, image : Soit f une application linéaire de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{F}$.
_ **Ker f** est l'ensemble des antécédents de 0 par f. Ker f = $\{x \in \mathcal{E} \ / \ f(x) = 0\}$
_ **Im f** est l'ensemble des images de $\mathcal{E}$ par f. Im f = $\{f(x), x \in \mathcal{E}\}$
Ker f est un s.e.v. de $\mathcal{E}$, Im f est un s.e.v. de $\mathcal{F}$.

Propriété : Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de $\mathcal{E}$, alors **Im f = Vect((f(e_1), …, f(e_n))**.

Propriété :
_ f est **injective** si et seulement si **Ker f = {0}**
_ f est surjective si et seulement si Im f = $\mathcal{F}$.

3. Matrice d'une application linéaire

Définition :
_ Soit f une application linéaire de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{F}$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{C}$ une base de $\mathcal{F}$. On appelle matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ la matrice, notée $M_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$ qui contient en colonnes les coordonnées de $f(e_1), \dots, f(e_n)$ dans la base $\mathcal{C}$.
_ si f est un endomorphisme de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de $\mathcal{E}$, on appelle matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ la matrice, notée $M_{\mathcal{B}}(f)$ qui contient en colonnes les coordonnées de $f(e_1), \dots, f(e_n)$ dans la base $\mathcal{B}$.

Propriété :
Soit f un endomorphisme de $\mathcal{E}$ et A la matrice de f dans une base de $\mathcal{E}$.
Alors **f est bijective ⇔ A est inversible**.

Propriété :
Soit f un endomorphisme de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de $\mathcal{E}$.
Si $A = M_{\mathcal{B}}(f)$, $A' = M_{\mathcal{B}'}(f)$ et $P = P_{\mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}'}$, alors on a :

$$\mathbf{A = PA'P^{-1}}$$

En général, la base $\mathcal{B}$ est la base canonique. Le but sera de trouver une base $\mathcal{B}'$ dans laquelle la matrice de f est très simple (diagonale, ou au pire triangulaire).