

1. Généralités sur les variables aléatoires à densité

1.1 Densité, fonction de répartition

Définition :

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Si f est positive sur $\mathbb{R}$

f est continue sauf éventuellement en un nombre fini de points

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ **CONVERGE** et vaut 1

Alors on dit que f est une densité de probabilité.

Définition :

Soit X une V.A.R. et f une densité de probabilité.

On dit que X admet f pour densité si : $\forall a \in \mathbb{R}, P(X \leq a) = \int_{-\infty}^a f(t)dt$

Propriété :

Dans ce cas, on a :

Pour tout réel a , $P(X = a) = 0$ $P(X \geq a) = P(X > a) = \int_a^{+\infty} f(t)dt$

Pour tous réels a et b avec $a < b$,

$P(a < X < b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(t)dt$

Rappel :

Soit X une V.A.R.. On appelle fonction de répartition de X la fonction : $F_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = P(X \leq x)$

Donc si X est une variable à densité, de densité f , alors $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$

Propriété :

Soit F une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Si F est continue sur $\mathbb{R}$, croissante de 0 à 1 et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points, alors F est la fonction de répartition d'une V.A.R. X admettant une densité de probabilité f , et $f = F'$ aux points où F' existe.

Remarque : Si on sait déjà que F est une fonction de répartition d'une V.A.R. X , on sait qu'elle est croissante de 0 à 1 ; pour montrer qu'il s'agit d'une V.A.R. à densité, il reste à montrer la continuité sur $\mathbb{R}$ et la classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf un nombre fini de points.

1.2 Espérance, moment, variance

Définition :

Soit X une V.A.R de densité f .

Si $\int_{-\infty}^{+\infty} t \times f(t)dt$ **CONVERGE**, X admet une espérance et $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t \times f(t)dt$.

Si $\int_{-\infty}^{+\infty} t^r \times f(t)dt$ **CONVERGE**, X admet un moment d'ordre r $m_r(X) = E(X^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^r f(t)dt$.

Théorème de transfert :

Si X est une variable aléatoire de densité f , si g est une fonction $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

et si $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f(t)dt$ converge absolument,

alors $g(X)$ admet une espérance, et $E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f(t)dt$

Linéarité de l'espérance

Soit X une V.A.R. de densité f .

Si X admet une espérance $E(X)$, alors $Y = aX + b$ admet une espérance, et

$E(Y) = E(aX + b) = aE(X) + b$

Définition :

Soit X une V.A.R. de densité f . Si convergence des intégrales,

$V(X) = E((X - E(X))^2)$ et $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Formule de Huygens :

Soit X une V.A.R. de densité f .

Si $E(X)$ et $E(X^2)$ existent, alors $V(X)$ existe et $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

2. Loïs usuelles

Loi	$u([a;b])$	$\mathcal{E}(\lambda)$	$\mathcal{N}(0,1)$	$\mathcal{N}(m,\sigma)$
Densité : $f(x) =$	$\begin{cases} \frac{1}{b-a} \text{ si } x \in [a,b] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$	$\begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \times \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$
Espérance	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{1}{\lambda}$	0	m
Variance	A calculer	$\frac{1}{\lambda^2}$	1	σ^2
Fonction de répartition $F_X(x) =$	$\begin{cases} 0 \text{ si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} \text{ si } a \leq x \leq b \\ 1 \text{ si } x > b \end{cases}$	$\begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$	Φ (table) $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$	Φ par transformation affine

Remarques : $X \rightarrow \mathcal{N}(m,\sigma) \Leftrightarrow X' = \frac{X-m}{\sigma} \rightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

_ Attention à reconnaître la valeur des intégrales correspondantes dans un exercice !

(ex calcul de $I = \int_0^{+\infty} te^{-t}dt$: c'est $E(X)$ si $X \rightarrow \mathcal{E}(1)$, donc $I = \frac{1}{1} = 1$)