ECE2 - Fiche : Intégrales impropres

1. Intégrales sur [a ; b [,]a ;b] ou] a ; b [

Définition :

Soit f une fonction continue ou continue par morceaux sur [a ; b[. (b réel ou + ∞)
Si $\int_a^X f(x)dx$ a une limite réelle quand X tend vers b, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ est convergente.
Dans ce cas, $\int_a^b f(x)dx = \lim_{X \to b}\left(\int_a^X f(x)dx\right)$

_ Attention, comme pour les séries, ne pas utiliser le symbole $\int_a^b f(x)dx$ tant que l'existence n'est pas prouvée !
_ ne pas utiliser de primitives ou d'intégrations par parties sur des intégrales impropres. Se ramener d'abord au segment [a ;X], puis passer à la limite.
_ la définition est similaire pour un intervalle du type]a ;b] (a réel ou – ∞) en cherchant la limite en a de $\int_X^b f(x)dx$
_ pour un intervalle]a;b[: choisir c entre a et b.
$\int_a^b f(x)dx$ est convergente si et seulement si $\int_a^c f(x)dx$ et $\int_c^b f(x)dx$ sont convergentes.
Dans ce cas, $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
_ La linéarité, la relation de Chasles, et la positivité de l'intégrale restent valables pour les intégrales impropres (sous réserve de convergence).

2. Intégrales de référence

Si a > 0, $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
si a > 0 $\int_0^a \frac{1}{x^\alpha} dx$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.

Remarque : Pour plus tard : penser à utiliser les intégrales issues des densités au programme :
$\forall a > 0$ $\int_0^{+\infty} ae^{-ax}dx$ converge et vaut 1 (densité de la loi exponentielle de paramètre a)

$\int_0^{+\infty} xae^{-ax}dx$ converge et vaut $\frac{1}{a}$ (espérance)

Pour $\int_0^{+\infty} x^2ae^{-ax}dx$, on peut utiliser la variance $V(X) = \frac{1}{a^2}$

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$ converge et vaut 1 (densité de la loi normale)

3. Intégrale d'une fonction positive / Comparaisons

Soient f et g deux fonctions positives sur l'intervalle [a ; b[.
_ si $\forall x \in [a ; b [$, $f(x) \leq g(x)$ ou si $f(x) =_b o(g(x))$
et si $\int_a^b g(x)dx$ converge, alors $\int_a^b f(x)dx$ converge
_ si $f(x) \sim_b g(x)$ alors $\int_a^b f(x)dx$ converge si et seulement si $\int_a^b g(x)dx$ converge.