

1. Rappels Espérance / Variance

1) Si $Y = aX + b$ _ si X admet une espérance, Y aussi et $E(Y) = aE(X) + b$
 _ si X admet une variance, Y aussi et $V(Y) = a^2V(X)$.

2) Si $Y = X_1 + \dots + X_n$
 _ si $X_1, \dots, X_n$ admettent chacun une espérance, alors Y admet une espérance et
 $E(Y) = E(X_1) + \dots + E(X_n)$

 _ si $X_1, \dots, X_n$ admettent des variances, alors Y aussi et :

$$V(Y) = \begin{cases} V(X_1) + \dots + V(X_n) & \text{si } X_1, \dots, X_n \text{ indépendantes} \\ V(X_1) + \dots + V(X_n) + 2 \sum_{i < j} \text{Cov}(X_i, X_j) & \text{sinon} \end{cases}$$

2. Estimateurs

Soit (X_i) une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi, et θ un réel.

On appelle estimateur de θ toute suite de variables aléatoires (T_n) telle que T_n dépend de $(X_1, \dots, X_n)$.

Biais d'un estimateur :

Si T_n est un estimateur de θ et si T_n admet une espérance, $b(T_n) = E(T_n) - \theta$

T_n est un estimateur sans biais de $\theta \Leftrightarrow E(T_n) = \theta$

Risque quadratique :

Si T_n admet un moment d'ordre 2, le risque quadratique de T_n est : $r(T_n) = E((T_n - \theta)^2)$.

Propriété : $r(T_n) = V(T_n) + b^2(T_n)$.

Si T_n est un estimateur sans biais, $r(T_n) = V(T_n)$.

Exemple : Soit (X_i) une suite de V.A.R. indépendantes qui suivent toutes la loi de Bernoulli de paramètre p . On pose $T_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$.

T_n est-il un estimateur sans biais de p ? Quel est son risque quadratique ?

3. Inégalité de Bienaymé Tchebychev

Soit X une V.A.R. admettant une espérance et une variance, alors :

$$\forall \varepsilon > 0, P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2} \quad (\text{ou } P(|X - E(X)| \geq \sigma t) \leq \frac{1}{t^2})$$

$$\Leftrightarrow P(|X - E(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

$$\Leftrightarrow P(E(X) - \varepsilon \leq X \leq E(X) + \varepsilon) \geq 1 - \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

Exemple :

Si T_n est la variable aléatoire de l'exemple précédent, montrer que $P(|T_n - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{p(1-p)}{n \varepsilon^2}$