ECE2: Correction des exercices sur les séries

Exercice 1

$-1 < \frac{5}{6} < 1$ donc $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{5}{6}\right)^n$ converge.

Et $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^n - 1 = \frac{1}{1-\frac{5}{6}} - 1 = 6 - 1 = 5$

$\sum_{n\geq 1} n\left(\frac{5}{6}\right)^n = \frac{5}{6}\sum_{n\geq 1} n\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$, donc la série converge et

$\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{5}{6}\right)^n = \frac{5}{6}\times\frac{1}{\left(1-\frac{5}{6}\right)^2} = \frac{5}{6}\times 36 = 30$

$\sum_{n\geq 1} n^2\left(\frac{5}{6}\right)^n = \sum_{n\geq 1}(n(n-1)+n)\left(\frac{5}{6}\right)^n = \sum_{n\geq 1} n(n-1)\left(\frac{5}{6}\right)^n + \sum_{n\geq 1} n\left(\frac{5}{6}\right)^n$

$= \frac{25}{36}\sum_{n\geq 1} n(n-1)\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} + \sum_{n\geq 1} n\left(\frac{5}{6}\right)^n$ (déjà fait)

$-1 < \frac{5}{6} < 1$ donc la série converge et $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2\left(\frac{5}{6}\right)^n = \frac{25}{36}\times\frac{2}{\left(1-\frac{5}{6}\right)^3} + 30 = \frac{25}{36}\times 2\times 6^3 + 30 = 330$

Exercice 2

1) Pour $n \geq 1$, $\frac{n-1}{n^2+3n+5}$ est positif. De plus $\frac{n-1}{n^2+3n+5} \sim_{+\infty} \frac{1}{n}$

Comme la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ diverge , $\sum \frac{n-1}{n^2+3n+5}$ aussi.

$\forall\, n \geq 1$ $1 + \frac{1}{n^2} \geq 1$ donc $\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \geq 0$. Comme $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2} = 0$ $\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \sim_{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Comme $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ converge, $\sum_{n\geq 1}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ aussi.

2) $\lim_{n\to+\infty} n^3 e^{-n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^3}{e^n} = 0$ (croissances comparées)

Donc $\lim_{n\to+\infty} n^2\times ne^{-n} = 0$ $\lim_{n\to+\infty}\frac{ne^{-n}}{\frac{1}{n^2}} = 0$ $ne^{-n} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. (séries à termes positifs)

Comme $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ converge, $\sum ne^{-n}$ aussi.