

Partie I : Analyse

Exercice 1

- 1 Soit $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :
$$\begin{cases} z_0 = 1 \\ z_1 = -1 \\ z_{n+2} = -2z_{n+1} + 3z_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$
 Exprimer z_n en fonction de n .
- 2) Soit $n \geq 1$. Déterminer $S_n = \sum_{k=1}^n k(k+1)$ et $T_n = \sum_{k=1}^n \frac{3}{4^k}$.

Exercice 2 On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :
$$\begin{cases} f(x) = x^2 \ln(x) + x & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$
.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que f est dérivable en 0 et donner la valeur de $f'(0)$.

Exercice 3 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = xe^{-x}$. Soit (C_f) la courbe représentative de f .

- 1) Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
- 2) Etudier les branches infinies de (C_f) .
- 3) Etudier la convexité de f . Préciser le(s) point(s) d'inflexion et la pente de leur tangente.
- 4) Tracer la courbe de f dans un repère adapté.

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = 2 + \ln(x)$. On donne : $\ln(3) \approx 1,10$ $\ln(4) \approx 1,38$

- 1) a) Pour $x \in]0; +\infty[$, on pose $g(x) = f(x) - x$. Etudier les variations et les limites de g .
- b) En déduire que f admet un unique point fixe α sur $[1; +\infty[$ et que $3 \leq \alpha \leq 4$.
- 2) a) Etudier les variations de f et montrer que l'intervalle $[3;4]$ est stable par f .

b) Montrer que $\forall x \in [3;4], |f'(x)| \leq \frac{1}{3}$.

3) Soit u_n la suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = f(u_n), \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [3;4]$.

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{3} |u_n - \alpha|$

c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{3^n}$. En déduire la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

4) Déterminer un rang n_0 à partir duquel $|u_n - \alpha| \leq 10^{-5}$.

5) a) En utilisant la suite (u_n) , écrire un programme Pascal qui calcule et affiche une valeur approchée à 10^{-5} près de α .

b) En utilisant une dichotomie, écrire un programme Pascal qui calcule et affiche une valeur approchée à 10^{-5} près de α .

Exercice 5

Pour tout entier naturel n , on note $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$.

1) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$. En déduire que la limite de la suite.

2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \frac{1}{(n+1)e} - \frac{I_{n+1}}{n+1}$.

Partie II : Algèbre

Exercice 1

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On considère le système (S_λ) suivant :
$$\begin{cases} (2-\lambda)x + y = 0 \\ x + (2-\lambda)y = 0 \end{cases}$$
 d'inconnue $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

On appelle E_λ l'ensemble des solutions du système.

- 1) Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, E_λ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
- 2) a) Déterminer les valeurs de λ pour lesquelles ce système n'est pas un système de Cramer.
b) Pour ces valeurs de λ , déterminer une base de E_λ .

Exercice 2 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. On note $C(A) = \{M \in M_2(\mathbb{R}), AM = MA\}$

- 1) Montrer que $C(A)$ est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$.
- 2) A l'aide de coefficients indéterminés, trouver la forme des matrices appartenant à $C(A)$.
- 3) Déterminer une base de $C(A)$.

Exercice 3 Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer la matrice B telle que $A = 2I_2 + B$.

En déduire A^n pour tout entier n .

Exercice 4

On considère trois suites a, b et c définies par :
$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ b_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \\ c_0 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a_{n+1} = 15a_n - 7b_n - 17c_n \\ b_{n+1} = 14a_n - 6b_n - 19c_n \\ c_{n+1} = 4a_n - 2b_n - 3c_n \end{cases}$$

On introduit la matrice $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ ainsi que les matrices $P = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1} .
 2. Déterminer une matrice A telle que $X_{n+1} = AX_n$.
- Exprimer X_n en fonction de n , A , et X_0 .
3. Vérifier que $A = PDP^{-1}$ puis exprimer A^n en fonction de P , D , P^{-1} et n .
 4. En déduire l'expression des suites (a_n) , (b_n) et (c_n) en fonction de n . (*commencer le produit par la droite !*)

Exercice 5 Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x - y - 3z \\ 3x + 3y + z \\ 7x + y - 5z \end{pmatrix} \end{cases}$. On appelle (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

- 1) Rappeler les coefficients de (e_1, e_2, e_3) .
- 2) Montrer que f est une application linéaire.
- 3) Déterminer $\text{Ker } f$. (on en donnera une base). f est-elle injective ?
- 4) Montrer que $f(e_3) = -\frac{8}{9}f(e_1) + \frac{11}{9}f(e_2)$. Déterminer une base de $\text{Im}(f)$.

5) La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \\ 7 & 1 & -5 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

Partie III : Probabilités

Exercice 1

Dans un aquarium, il y a cinq poissons rouges, trois poissons noirs et deux poissons argentés. On pêche au hasard trois poissons. Calculer la probabilité des événements suivants :

A : « Les trois poissons sont de la même couleur »

B : « Les trois poissons pêchés sont de couleurs différentes »

C : « Les trois poissons pêchés sont de deux couleurs exactement »

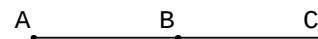
Exercice 2

Deux urnes A et B contiennent respectivement 4 boules rouges et 3 boules vertes, 5 boules rouges et 3 boules vertes. On tire au hasard une boule dans l'urne A (sans l'y remettre), puis on procède au tirage d'une deuxième boule, dans la même urne si la première boule tirée est rouge, dans l'autre urne si la première boule tirée est verte.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules vertes ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule rouge au deuxième tirage ?
3. La deuxième boule est rouge. Quelle est la probabilité d'avoir tirée une boule verte au 1^{er} tirage ?

Exercice 3

Une puce se déplace entre 3 points A, B, C, situés de la manière suivante :



A l'instant $n = 0$, la puce se situe en A.

- Si la puce est en A à l'instant n , alors à l'instant $n + 1$, elle reste en A ou saute en B avec la même probabilité
- Si la puce est en B à l'instant n , alors à l'instant $n + 1$, elle reste en B ou saute en A ou en C avec la même probabilité
- Si la puce est en C à l'instant n , alors à l'instant $n + 1$, elle reste en C ou saute en B avec la même probabilité.

On note A_n = "La puce est en A à l'instant n " B_n = "La puce est en B à l'instant n "
et C_n = "La puce est en C à l'instant n ". On note également : $a_n = P(A_n)$, $b_n = P(B_n)$, $c_n = P(C_n)$.

1. Déterminer a_0 , b_0 , c_0 .
2. Déterminer $P_{A_n}(A_{n+1})$ ainsi que les huit probabilités conditionnelles analogues.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer a_{n+1} , b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n , b_n , et c_n .
4. a) Que vaut $a_n + b_n + c_n$? Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} = -\frac{1}{6}b_n + \frac{1}{2}$.
b) Déterminer l'expression de b_n en fonction de n . En déduire que $a_n + c_n = \frac{4}{7} + \frac{3}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
5. Exprimer $a_{n+1} - c_{n+1}$ en fonction de $a_n - c_n$. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n - c_n = \frac{1}{2^n}$.
6. Déterminer l'expression de a_n et de c_n en fonction de n . $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n$.

Exercice 4

Un étudiant désirant obtenir son diplôme doit valider pour cela 3 unités de valeurs (U.V.) indépendantes et capitalisables, notées u_1 , u_2 , u_3 . A chaque session d'examen, il passe toutes les U.V. non obtenues. Sa probabilité de réussite à une épreuve est p (avec $0 < p < 1$), les épreuves sont indépendantes. On pose $q = 1 - p$.

Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, on note U_i le nombre de sessions nécessaires pour valider l'U.V. $n^{\circ}i$, et X le nombre de sessions nécessaires pour obtenir le diplôme.

- 1) a) Reconnaître la loi de U_1 , U_2 et U_3 . Pour $k \geq 1$, déterminer $P(U_1 \leq k)$, $P(U_2 \leq k)$, $P(U_3 \leq k)$.
2) Déterminer $P(X \leq k)$ et en déduire la loi de X .

Exercice 5

Une piste rectiligne est divisée en cases numérotées 0, 1, 2, ... de gauche à droite. Une puce se déplace vers la droite de une ou deux cases au hasard à chaque saut. Au départ, elle est sur la case 0. Soit X_n le numéro de la case occupée par la puce après n sauts et Y_n le nombre de fois où la puce a sauté d'une case au cours des n premiers sauts.

- 1) Reconnaître la loi de Y_n . En déduire $E(Y_n)$ et $V(Y_n)$.
- 2) Exprimer X_n en fonction de Y_n et n . En déduire $E(X_n)$ et $V(X_n)$.

Exercice 6

Une urne contient des boules blanches et des boules noires. La proportion de boules blanches est p et la proportion de boules noires est q . Ainsi, on a : $0 < p < 1$, $0 < q < 1$ et $p + q = 1$.

Partie I : Tirages avec arrêt dès qu'une boule noire a été obtenue

Dans cette partie, on effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès que l'on a obtenu une boule noire. On note T la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués et U la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

1. Reconnaître la loi de T . Pour tout entier $k \geq 1$, donner $P(T = k)$ et rappeler l'espérance et la variance de T .
2. En déduire que U admet une espérance et une variance. Déterminer $E(U)$ et $V(U)$.

Partie II : Tirages avec arrêt dès qu'une boule blanche et une boule noire ont été obtenues

Dans cette partie, on effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès que l'on a obtenu au moins une boule blanche et au moins une boule noire. On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués. On note Y la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues. On note Z la variable aléatoire égale au nombre de boules noires obtenues.

Ainsi, on peut remarquer que la probabilité de l'événement $(Y = 1) \cup (Z = 1)$ est égale à 1.

Pour tout entier naturel non nul i , on note :

B_i l'événement "la i -ème boule tirée est blanche",

N_i l'événement "la i -ème boule tirée est noire".

1. a) Montrer, pour tout entier $k \geq 2$: $P(X = k) = q p^{k-1} + p q^{k-1}$.

- b) Vérifier : $\sum_{k=2}^{+\infty} P(X = k) = 1$

- c) Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance et que : $E(X) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$.

2. a) Pour tout entier $k \geq 2$, déterminer $P((X = k) \cap (Y = 1))$ (On distinguera les cas $k = 2$ et $k \geq 3$.)

- b) En déduire : $P(Y = 1) = q(1 + p)$.

- c) Déterminer la loi de la variable aléatoire Y .

On admet que l'espérance de Y existe et que : $E(Y) = \frac{1}{q}(1 - p + p^2)$

3. Donner la loi de Z et son espérance.

4. Simulation informatique. Compléter les instructions ci-dessous pour que le programme suivant calcule et affiche les valeurs de X , Y et Z . (p étant donné par l'utilisateur).

```
program exvacances;
```

```
VAR p:real; x,y,z:integer;
```

```
BEGIN readln(p);randomize;
```

```
repeat
```

```
____;
```

```
if random<p then ____
```

```
else ____;
```

```
until ____ AND ____;
```

```
writeln(x,y,z);readln;
```

```
END.
```