ECE1 ⟶ ECE2 : Correction des exercices

Partie I : Exercice 1 1) (z_n) est une suite linéaire récurrente d'ordre 2 à coefficients constants.
Equation caractéristique : $x^2 = -2x + 3 \quad x^2 + 2x - 3 = 0 \quad (x-1)(x+3) = 0$ (1 racine évidente)
Donc $z_n = \lambda \times 1^n + \mu \times (-3)^n = \lambda + \mu(-3)^n$

$$\begin{cases} z_0 = \lambda + \mu = 1 \\ z_1 = \lambda - 3\mu = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ 4\mu = 2 \quad L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1/2 \\ \mu = 1/2 \end{cases} \text{ donc } z_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(-3)^n.$$

2) $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 + k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+4)}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

$$T_n = 3\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{4}\right)^k = 3 \times \left(\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{4}} - 1\right) = 3 \times \frac{4}{3}\left(1 - \frac{1}{4^{n+1}}\right) - 3 = 1 - \frac{1}{4^n}.$$

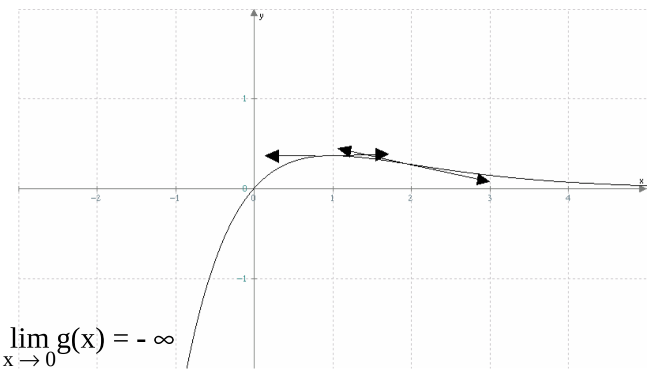
Exercice 2 1) f est continue sur $]0; +\infty[$ car somme de fonctions continues.
En 0 : $\lim_{x \to 0} x^2\ln(x) = 0$ (croissances comparées) donc $\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$. Donc f est continue en 0.
Donc f est continue sur $\mathbb{R}^+$.
2) $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^2\ln(x) + x}{x} = x\ln(x) + 1 \quad \lim_{x \to 0} x\ln(x) = 0$ (croissances comparées) donc $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1$
donc f est dérivable en 0 et f '(0) = 1.

Exercice 3 1) $f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1 - x)e^{-x}$ du signe de $(1 - x)$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f '		+	0	–	
f	$-\infty$	↗	1/e	↘	0

2) En $+\infty$: F.I. $f(x) = -(-x)e^{-x} \quad \lim_{x \to +\infty} -x = -\infty \quad \lim_{X \to -\infty} Xe^X = 0$ donc $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$. A.H.d'équation y = 0.
En $-\infty$: $\lim_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$ donc $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.
$\frac{f(x)}{x} = e^{-x} \quad \lim_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$ donc branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.
3) $f''(x) = -1\, e^{-x} + (1 - x)(-e^{-x}) = (x - 2)e^{-x}$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f ''		–	0	+	
convexité de f		concave		convexe	



Un point d'inflexion : $A(2, 2/e^2)$. $f'(2) = \frac{1}{e^2}$

Equation de la tangente : $y = -\frac{1}{e^2}(x - 2) + \frac{2}{e^2} = \frac{4 - x}{e^2}$

4)

Exercice 4 1) a) $g(x) = 2 + \ln(x) - x \quad \lim_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$ donc $\lim_{x \to 0} g(x) = -\infty$

$\ln(x) =_{+\infty} o(x)$ donc $g(x) \sim_{+\infty} -x$ donc $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty g'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1 - x}{x}$ du signe de $1 - x$.

x	0		1		$+\infty$
g '(x)		+	0	–	
g(x)	$-\infty$	↗	1	↘	$-\infty$

b) Sur $[1; +\infty[$, g est continue et strictement décroissante. De plus $0 \in]-\infty;1]$, donc l'équation $g(x) = 0$ ($\Leftrightarrow$ $f(x) = x$) admet une unique solution α sur $[1; +\infty[$.
$g(3) = \ln(3) - 1 \approx 0{,}10 > 0 \quad g(4) = \ln(4) - 2 \approx -0{,}62 < 0 \quad g(\alpha) = 0$
$g(4) < g(\alpha) < g(3)$ et g décroissante sur $[1; +\infty[$ donc $3 \leq \alpha \leq 4$. 2 a) $f'(x) = 1/x > 0$

x	0	3	4	$+\infty$
f '(x)		+		
f(x)		$2 + \ln(3)$ ↗	$2 + \ln(4)$	

f est croissante donc $f([3;4]) = [f(3), f(4)] \quad f(3) > 3$ et $f(4) < 4$ donc $f([3;4]) \subset [3;4]$

Donc l'intervalle [3;4] est stable par f.

b) $\forall x \in [3;4]$ $3 \le x \le 4$ $\quad \frac{1}{3} \ge \frac{1}{x} \ge \frac{1}{4} \quad -\frac{1}{3} \le \frac{1}{4} \le f'(x) \le \frac{1}{3}$ donc $|f'(x)| \le \frac{1}{3}$ sur [3;4].

3) a) On procède par récurrence : _ $u_0 = 3 \in [3;4]$

_ supposons que $u_n \in [3;4]$. L'intervalle est stable par f, donc $f(u_n) = u_{n+1} \in [3;4]$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [3;4]$.

b) $\left.\begin{array}{c} \forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [3, 4] \\ \alpha \in [3,4] \\ \forall x \in [3,4], |f'(x)| \le 1/3 \end{array}\right\}$ D'après l'I.A.F., $|f(u_n) - f(\alpha)| \le \frac{1}{3}|u_n - \alpha| \Leftrightarrow |u_{n+1} - \alpha| \le \frac{1}{3}|u_n - \alpha|$

c) On procède par récurrence :

_ $|u_0 - \alpha| = |3 - \alpha| = \alpha - 3 \le 1$ car $\alpha \in [3;4]$ $\quad 1/3^0 = 1$ donc la propriété. est vraie au rang 0.

_ supposons que $|u_n - \alpha| \le \frac{1}{3^n}$ alors $|u_{n+1} - \alpha| \le \frac{1}{3}|u_n - \alpha| \le \frac{1}{3} \times \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3^{n+1}}$ la prop. est héréditaire.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \le |u_n - \alpha| \le 1/3^n$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} 1/3^n = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n - \alpha| = 0 \quad \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$.

4) $\forall n \in \mathbb{N}$ $|u_n - \alpha| \le \frac{1}{3^n}$. Donc : Si $\frac{1}{3^n} \le 10^{-5}$, on est sûr que $|u_n - \alpha| \le 10^{-5}$.

$\frac{1}{3^n} \le 10^{-5} \Leftrightarrow 3^n \ge 10^5 \Leftrightarrow \ln(3^n) \ge \ln(10^5) \Leftrightarrow n\ln(3) \ge 5\ln(10) \Leftrightarrow n \ge \frac{5\ln(10)}{\ln(3)}$ ($\approx 10{,}48$). Donc n = 11 convient.

5) a) On a vu que $|u_{11} - \alpha| \le 10^{-5}$ donc u_{11} est une valeur approchée de α à 10^{-5} près. Il suffit de calculer u_{11}.

```
program suite;
var i:integer;    u:real;
begin
    u:=3;
    for i:=1 to 11 do u:=2+ln(u);
    writeln('Une valeur approchée de alpha vaut : ',u);
    readln;end.
```

b)
```
program vacances;
var a,b,c : real;
begin    a:=3;b:=4;
  repeat
    c:=(a+b)/2;
    if 2+ln(c)-c>0 then a:=c
                else b:=c;
  until b-a<1E-5;
writeln(a);readln;end.
```

Exercice 5

1) $\forall x \in [0;1]$, $0 \le x \le 1$ $\quad -1 \le -x \le 0 \quad e^{-1} \le e^{-x} \le e^0$ donc $0 \le e^{-x} \le 1$ et $0 \le x^n e^{-x} \le x^n$

Par croissance de l'intégrale, $0 \le \int_0^1 x^n e^{-x}dx \le \int_0^1 x^n dx \qquad 0 \le I_n \le \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \quad 0 \le I_n \le \frac{1}{n+1}$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$.

2) Intégration par parties : $u(x) = e^{-x}$ $\quad v'(x) = x^n$ donc $u'(x) = -e^{-x}$ et $v(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

Donc $I_n = \left[\frac{x^{n+1}e^{-x}}{n+1}\right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{e^{-x}x^{n+1}}{n+1}dx = \frac{e}{n+1} + \frac{I_{n+1}}{n+1}$.

Partie II Exercice 1

1) E_λ est l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène, donc c'est un sous-espace vectoriel.

2) a) $\begin{cases} (2-\lambda)x + y = 0 \\ x + (2-\lambda)y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + (2-\lambda)y = 0 \\ (2-\lambda)x + y = 0 \end{cases} L_1 \leftrightarrow L_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x + (2-\lambda)y = 0 \\ (1-(2-\lambda)^2)y = 0 \end{cases} L_2 \leftarrow L_2 - (2-\lambda)L_1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + (2-\lambda)y = 0 \\ (1-2+\lambda)(1+2-\lambda)y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + (2-\lambda)y = 0 \\ (\lambda-1)(3-\lambda)y = 0 \end{cases}$

Le système n'est pas de Cramer si un coefficient diagonal est nul, donc si $\lambda = 1$ ou 3.

b) Si $\lambda = 1$: $\left\{\begin{array}{r} x + y = 0 \\ 0 = 0 \end{array}\right.$ y inconnue secondaire : $x = -y$ $E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} -y \\ y \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

Le vecteur $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est non nul, donc c'est une base de E_1.

Si $\lambda = 3$: $\left\{\begin{array}{r} x - y = 0 \\ 0 = 0 \end{array}\right.$ y inc. secondaire $x = y$ $E_3 = \left\{ \begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une base de E_3.

Exercice 2 1) _ $A \times O = O$ $O \times A = O$ donc $O \in C(A)$

_ si $M \in C(A)$, $M' \in C(A)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$: on sait que $AM = MA$ et $AM' = M'A$

$A(M + M') = AM + AM' = MA + M'A = (M + M')A$ donc $M + M' \in C(A)$.

$A(\lambda M) = \lambda(AM) = \lambda(MA) = (\lambda M)A$ donc $\lambda M \in C(A)$. Donc $C(A)$ est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$.

2) $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $AM = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a + c & 2b + d \\ 2c & 2d \end{pmatrix}$ $MA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & a + 2b \\ 2c & c + 2d \end{pmatrix}$

$$AM = MA \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2a + c = 2a \\ 2b + d = 2b + a \\ 2c = 2c \\ 2d = c + 2d \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} c = 0 \\ d = a \end{array}\right. \text{ donc } M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}.$$

3) $C(A) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

Les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ forment une famille génératrice de C(A). Comme elles ne sont pas proportionnelles, elles forment aussi une famille libre, donc une base de C(A).

Exercice 3 $B = A - 2I_2 = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ $B^2 = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A = B + 2I_2$ B et $2I_2$ commutent, donc d'après la formule du binôme de Newton :

$$A^n = (B + 2I_2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k (2I_2)^{n-k} = \binom{n}{0} B^0 (2I_2)^n + \binom{n}{1} B^1 (2I_2)^{n-1} = 1 \times I_2 \times 2^n \times I_2^{\,n} + nB2^{n-1}I_2^{\,n-1}$$

$$= 2^n I_2 + n2^{n-1}B = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} + n2^{n-1}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n + n2^n & -n2^{n+1} \\ n2^{n-1} & n^n - n2^n \end{pmatrix}$$

Exercice 4

1) $P = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 5 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\begin{array}{l} L_2 \leftarrow 3L_1 + L_2 \\ L_3 \leftarrow 2L_1 - L_3 \end{array}$

$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -5 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ $L_3 \leftarrow 3L_2 - 7L_3$ donc P est inversible

$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 6 & -3 & -7 \\ 28 & -14 & -35 \\ -5 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ $\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 5L_3 \end{array}$

$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 6 & -3 & -7 \\ 4 & -2 & -5 \\ -5 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ $L_2 \leftarrow \frac{1}{7} L_2$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 4 & -2 & -5 \\ -5 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ $L_1 \leftarrow 2L_2 - L_1$ donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 4 & -2 & -5 \\ -5 & 3 & 7 \end{pmatrix}$

2) $X_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15a_n - 7b_n - 17c_n \\ 14a_n - 6b_n - 19c_n \\ 4a_n - 2b_n - 3c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -7 & -17 \\ 14 & -6 & -19 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -7 & -17 \\ 14 & -6 & -19 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix} X_n$

Donc $X_n = A \times \ldots \times A \times X_0 = A^n X_0$

3) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 4 & -2 & -5 \\ -5 & 3 & 7 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 6 & 1 \\ 6 & 3 & 2 \\ -4 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 15 & -7 & -17 \\ 14 & -6 & -19 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix} = A$ donc $A^n = (PDP^{-1})^n = PDP^{-1}PDP^{-1}\dots PDP^{-1} = PD^nP^{-1}$

4) Donc $X_n = A^nX_0 = PD^nP^{-1}X_0$ $P^{-1}X_0 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 4 & -2 & -5 \\ -5 & 3 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$

$D^nP^{-1}X_0 = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times 2^n \\ 4\times 3^n \\ -5 \end{pmatrix}$ $PD^nP^{-1}X_0 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\times 2^n \\ 4\times 3^n \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\times 2^n + 8\times 3^n - 5 \\ 6\times 2^n + 4\times 3^n - 10 \\ -4\times 2^n + 4\times 3^n \end{pmatrix}$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = -2\times 2^n + 8\times 3^n - 5$ $b_n = 6\times 2^n + 4\times 3^n - 10$ $c_n = -4\times 2^n + 4\times 3^n$

Exercice 5 1) $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2) $\forall X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $f(X) = \begin{pmatrix} 2x - y - 3z \\ 3x + 3y + z \\ 7x + y - 5z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \\ 7 & 1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Donc f est une application linéaire dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est : $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \\ 7 & 1 & -5 \end{pmatrix}$.

3) $f(X) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - 3z = 0 \\ 3x + 3y + z = 0 \\ 7x + y - 5z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - 3z = 0 \\ 9y + 11z = 0 & L_2 \leftarrow 2L_2 - 3L_1 \\ 9y + 11z = 0 & L_3 \leftarrow 2L_3 - 7L_1 \end{cases}$

z inconnue secondaire : $y = -\frac{11}{9}z$ $2x + \frac{11}{9}z - 3z = 0$ $2x - \frac{16}{9}z = 0$ $x = \frac{8}{9}z$

Donc $\ker(f) = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{8z}{9} \\ -\frac{11z}{9} \\ z \end{pmatrix}, z \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\begin{pmatrix} \frac{8}{9} \\ -\frac{11}{9} \\ 1 \end{pmatrix} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 8 \\ -11 \\ 9 \end{pmatrix}\right)$. $\begin{pmatrix} 8 \\ -11 \\ 9 \end{pmatrix}$ est une base de Ker f (libre car non nul). Ker f $\neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc f n'est pas injective.

4) $-\frac{8}{9} f(e_1) + \frac{11}{9} f(e_2) = -\frac{8}{9}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + \frac{11}{9}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -27 \\ 9 \\ -45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} f(e_3)$

Donc $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) = \text{Vect}(f(e_1), f(e_2))$ puisque $f(e_3)$ est combinaison linéaire des deux premiers $\text{Im}(f) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc forment une famille libre et une base de Im(f). 5) $f(X) = AX$ n'est pas bijective donc A n'est pas inversible.

Partie III Exercice 1

L'ordre n'importe pas, on ne remet pas les poissons à l'eau. Donc $\text{card}(\Omega) = \binom{10}{3} = \frac{10!}{3!7!} = \frac{10\times 9\times 8}{3\times 2} = 120$

$\text{card}(A) = \binom{5}{3}$ (tous rouges) $+ \binom{3}{3}$ (tous noirs) $= \frac{5\times 4}{2} + 1 = 11$ donc $P(A) = \frac{11}{120}$

card(B) = 5 (un rouge) × 3 (un noir) × 2 (un argenté) = 30 donc $P(B) = \frac{30}{120} = \frac{1}{4}$

$P(C) = 1 - P(A) - P(B) = 1 - \frac{11}{120} - \frac{30}{120} = \frac{79}{120}$

ou : C = "2 rouges et un autre" ou "2 noirs et un autre" ou "2 argentés et un autre"

$\text{card}(C) = \binom{5}{2}\times 5 + \binom{3}{2}\times 7 + \binom{2}{2}\times 8 = 10\times 5 + 3\times 7 + 1\times 8 = 79$ donc $P(C) = \frac{79}{120}$

Exercice 2 1) $P(V_1 \cap V_2) = P(V_1) \times P_{V1}(V_2) = P(V_1) \times P_B(V_2) = \dfrac{3}{7} \times \dfrac{3}{8} = \dfrac{9}{56}$

2) (R_1, V_1) est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales,

$P(R_2) = P(R_1) \times P_{R1}(R_2) + P(V_1) \times P_{V1}(R_2) = \dfrac{4}{7} \times \dfrac{3}{6} + \dfrac{3}{7} \times \dfrac{5}{8} = \dfrac{2}{7} + \dfrac{15}{56} = \dfrac{31}{56}$

3) $P_{R2}(V_1) = \dfrac{P(V_1 \cap R_2)}{P(R_2)} = \dfrac{P(V_1) \times P_{V1}(R_2)}{P(R_2)} = \dfrac{\frac{3}{7} \times \frac{5}{8}}{\frac{31}{56}} = \dfrac{\frac{15}{56}}{\frac{31}{56}} = \dfrac{15}{31}$.

Exercice 3

1. A l'instant 0, la puce est en A. Donc $a_0 = P(A_0) = 1$, $b_0 = P(B_0) = 0$, $c_0 = P(C_0) = 0$.

2. D'après l'énoncé, on a : $P_{An}(A_{n+1}) = P_{An}(B_{n+1}) = \dfrac{1}{2}$ $\quad P_{An}(C_{n+1}) = 0$

$P_{Bn}(A_{n+1}) = P_{Bn}(B_{n+1}) = P_{Bn}(C_{n+1}) = \dfrac{1}{3}$ $\quad P_{Cn}(A_{n+1}) = 0$ $\quad P_{Cn}(B_{n+1}) = P_{Cn}(C_{n+1}) = \dfrac{1}{2}$.

3. (A_n, B_n, C_n) forment un système complet d'événements. Donc, d'après la formule des probabilités totales,

$P(A_{n+1}) = P(A_n)P_{An}(A_{n+1}) + P(B_n)P_{Bn}(A_{n+1}) + P(C_n)P_{Cn}(A_{n+1}) = a_n \times \dfrac{1}{2} + b_n \times \dfrac{1}{3} + c_n \times 0 = \dfrac{1}{2} a_n + \dfrac{1}{3} b_n$.

De même $b_{n+1} = P(B_{n+1}) = \dfrac{1}{2} a_n + \dfrac{1}{3} b_n + \dfrac{1}{2} c_n$ et $c_{n+1} = P(C_{n+1}) = 0 \times a_n + \dfrac{1}{3} \times b_n + \dfrac{1}{2} \times c_n$

4. a) (A_n, B_n, C_n) forment un système complet d'événements, donc $a_n + b_n + c_n = 1$.

b) Donc $b_{n+1} = \dfrac{1}{2}(a_n + c_n) + \dfrac{1}{3} b_n = \dfrac{1}{2}(1 - b_n) + \dfrac{1}{3} b_n = -\dfrac{1}{6} b_n + \dfrac{1}{2}$

c) (b_n) est donc une suite arithmético-géométrique. Point fixe : $c = -\dfrac{1}{6} c + \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{7}{6} c = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow c = \dfrac{3}{7}$

Donc $u_n = b_n - \dfrac{3}{7}$ est une suite géometrique de raison $-\dfrac{1}{6}$. $b_n - \dfrac{3}{7} = \left(-\dfrac{1}{6}\right)^n \left(b_0 - \dfrac{3}{7}\right)$ $\qquad b_n = \dfrac{3}{7} - \dfrac{3}{7}\left(-\dfrac{1}{6}\right)^n$

d) $a_n + c_n = 1 - b_n = \dfrac{4}{7} + \dfrac{3}{7}\left(-\dfrac{1}{6}\right)^n$ $\qquad$ 5. $a_{n+1} - c_{n+1} = \dfrac{1}{2} a_n + \dfrac{1}{3} b_n - \dfrac{1}{3} b_n - \dfrac{1}{2} c_n = \dfrac{1}{2}(a_n - c_n)$.

Donc la suite $(a_n - c_n)$ est géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$. Donc $a_n - c_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n (a_0 - c_0) = \dfrac{1}{2^n}$

6. $a_n - c_n = \dfrac{1}{2^n} \Leftrightarrow a_n = c_n + \dfrac{1}{2^n}$ $\quad$ comme $a_n + c_n = \dfrac{4}{7} + \dfrac{3}{7}\left(-\dfrac{1}{6}\right)^n$ $\quad 2c_n + \dfrac{1}{2^n} = \dfrac{4}{7} + \dfrac{3}{7}\left(-\dfrac{1}{6}\right)^n$

$c_n = \dfrac{2}{7} + \dfrac{3}{14}\left(-\dfrac{1}{6}\right)^n - \dfrac{1}{2 \times 2^n}$ $\qquad a_n = c_n + \dfrac{1}{2^n} = \dfrac{2}{7} + \dfrac{3}{14}\left(-\dfrac{1}{6}\right)^n + \dfrac{1}{2 \times 2^n}$

6) $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\dfrac{1}{6}\right)^n = 0$ (car $-1 < -\dfrac{1}{6} < 1$) et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \dfrac{2}{7}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = \dfrac{3}{7}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} c_n = \dfrac{2}{7}$.

Exercice 4 1) a) A chaque session, la probabilité de réussite à l'unité de valeur u1 est p. Les sessions sont indépendantes. U_1 est le numéro du premier succès. Donc $U_1 \longrightarrow G(p)$. De même $U_2 \longrightarrow G(p)$ et $U_3 \longrightarrow G(p)$.

b) $P(U_1 \leq k) = 1 - P(U_1 > k)$ Or $P(U_1 > k) = P($les k premières sessions sont ratées") $= q^k$

Donc $P(U_1 \leq k) = 1 - q^k$ De même $P(U_2 \leq k) = 1 - q^k$ et $P(U_3 \leq k) = 1 - q^k$

2) $(X \leq k)$ = "le diplôme est obtenu lors d'une des k premières sessions" = "les 3 u.v. sont obtenues lors d'une des k premières sessions" $= (U_1 \leq k) \cap (U_2 \leq k) \cap (U_3 \leq k)$.

Les U.V. étant indépendantes, $P(X \leq k) = P(U_1 \leq k)P(U_2 \leq k)P(U_3 \leq k) = (1 - q^k)^3$

Donc $P(X = k) = P(X \leq k) - P(X \leq k - 1) = (1 - q^k)^3 - (1 - q^{k-1})^3$

Exercice 5 1) A chaque saut, la probabilité de sauter une case est : 1/2

Il y a n sauts indépendants. Y_n est le nombre de sauts d'une case. Donc $Y_n \longrightarrow B(n, 1/2)$.

Donc $E(Y_n) = n \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{n}{2}$ $\qquad V(Y_n) = n \times \dfrac{1}{2} \times \left(1 - \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{n}{4}$

2) La puce a sauté Y_n fois d'une case, et donc $n - Y_n$ fois de deux cases. Donc $X_n = Y_n \times 1 + (n - Y_n) \times 2$

$X_n = 2n - Y_n$ donc $E(X_n) = 2n - E(Y_n) = 2n - \frac{n}{2} = \frac{3n}{2}$ $V(X_n) = (-1)^2V(Y_n) = \frac{n}{4}$

Exercice 6

Partie I : 1. La probabilité d'obtenir une boule noire est q. Les tirages indépendants. T est le nombre d'essais pour obtenir une boule noire. Donc $T \longrightarrow G(q)$. $\forall k \geq 1$, $P(T = k) = p^{k-1}\times q$

$E(T) = \frac{1}{q}$. $V(T) = \frac{1-q}{q^2} = \frac{p}{q^2}$.

2. On a $U = T - 1$ donc U admet une espérance et une variance et

$E(U) = E(T) - 1 = \frac{1}{q} - 1 = \frac{p}{q}$ $V(U) = 1^2V(T) = \frac{p}{q^2}$

Partie II : 1. a) $\forall k \geq 2$, $(X = k) = B_1\ldots B_{k-1}N_k \cup N_1\ldots N_{k-1}B_k$ (incompatibles, tirages indépendants) donc $P(X= k) = p^{k-1}q + q^{k-1}p$

b) $\sum_{k=2}^{+\infty} P(X = k) = \sum_{k=2}^{+\infty} p^{k-1}q + q^{k-1}p = \sum_{j=1}^{+\infty} p^jq + q^jp$ (en posant $j = k - 1$)

$=q\sum_{j=1}^{+\infty} p^j + p\sum_{j=1}^{+\infty} q^j = q\times\left(\frac{1}{1-p} - 1\right) + p\left(\frac{1}{1-q} - 1\right) = (1-p)\times\frac{p}{1-p} + p\times\frac{1-p}{p} = p + 1 - p = 1$

c) $\sum_{k\geq 2} kP(X= k) = q\sum_{k\geq 2} kp^{k-1} + p\sum_{k\geq 2} kq^{k-1}$

$0 < p < 1$ et $0 < q < 1$ donc les séries convergent absolument. Donc X admet une espérance et

$E(X) = q\left(\frac{1}{(1-p)^2} - 1\right) + p\left(\frac{1}{(1-q)^2} - 1\right) = q\left(\frac{1}{q^2} - 1\right) + p\left(\frac{1}{p^2} - 1\right) = \frac{1}{q} + \frac{1}{p} - p - q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1.$

2. a) $(X = 2) \cap (Y = 1) = B_1N_2 \cup N_1B_2$ donc $P((X = 2) \cap (Y = 1)) = pq + qp = 2pq$

$\forall k \geq 3$, $P((X = k) \cap (Y = 1)) = P(N_1\ldots N_{k-1}B_k) = q^{k-1}p$

b) $P(Y = 1) = \sum_{k=2}^{+\infty} P((X = k) \cap (Y = 1)) = 2pq + \sum_{k=3}^{+\infty} q^{k-1}p = 2pq + p\sum_{j=2}^{+\infty} q^j$

$= 2pq + p\left(\frac{1}{1-q} - 1 - q\right) = 2pq + \frac{p}{p} - p - pq = pq - p + 1 = pq + q = q(1 + p).$

c) $\forall k \geq 2$, $P(Y= k) = P(B_1\ldots B_kN_{k+1}) = p^kq$.

3. Z et Y ont des rôles symétriques, en remplaçant p par q (et inversement).

Donc $P(Z = 1) = p(1 + q)$ $\forall k \geq 2$, $P(Z = k) = q^kp$ et $E(Z) = \frac{1}{p}(1 - q - q^2)$.

ou : $Z = X - Y$ donc $E(Z) = E(X) - E(Y) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 - \frac{1}{q}\left(1 - p + p^2\right) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 - \frac{1}{q} + \frac{p}{q} - \frac{p^2}{q}$

$= \frac{1}{p} - 1 + \frac{p(1-p)}{q} = \frac{1}{p} - 1 + p$

```
 repeat      x:=x+1;
   if random<p then y:=y+1
              else z:=z+1;
  until (y>0) AND (z>0); …
END.
```