ECE2 : Exercices Estimateurs

Exercice (d'après ESC 2006)

Soit T une V.A.R. dont une densité de probabilité est f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{R^2} \text{ si } 0 \leq x \leq R \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

où R est un réel strictement positif inconnu.

1) a) Vérifier que f est bien une densité de probabilité.
b) Montrer que T admet une espérance et une variance que l'on calculera.
c) Déterminer la fonction de répartition de T.

2) Soit $T_1, \ldots, T_n$ n V.A.R. indépendantes de même loi que T. On pose $X_n = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_i$

a) Calculer $E(X_n)$ et $V(X_n)$.
b) X_n est-il un estimateur sans biais de R ?
c) Déterminer un réel λ tel que $\overline{X_n} = \lambda X_n$ soit un estimateur sans biais de R.
d) Déterminer le risque quadratique de l'estimateur $\overline{X_n}$ de R.
e) Posons $Y_n = \dfrac{1}{2}(T_{n-1} + T_n)$. Montrer que $\overline{Y_n} = \lambda Y_n$ est aussi un estimateur sans biais de R.

Qui de $\overline{X_n}$ ou de $\overline{Y_n}$ choisiriez-vous pour approcher R ?

3) On considère un nombre $\varepsilon > 0$ donné.
a) A l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que $P\left(\left|\overline{X_n} - R\right| \geq \varepsilon\right) \leq \dfrac{R^2}{8n\varepsilon^2}$
b) En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} P\left(\left|\overline{X_n} - R\right| \geq \varepsilon\right) = 0$

4) On note M_n la variable aléatoire prenant pour valeur le maximum des valeurs prises par les variables $T_1, T_2, \ldots, T_n$.
a) Pour tout réel x, déterminer la relation entre les événements
$(M_n \leq x), (T_1 \leq x), (T_2 \leq x), \ldots, (T_n \leq x)$.
b) Montrer que pour tout réel x , $P(M_n \leq x) = (F_X(x))^n$. En déduire la fonction de répartition de M_n, puis montrer que M_n est une variable aléatoire à densité.
c) Montrer qu'une densité possible de M_n est la fonction g_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} gn(t) = 2n\dfrac{t^{2n-1}}{R^{2n}} \text{ si } t \in [0, R] \\ gn(t) = 0 \text{ si } t \notin [0, R] \end{cases}$$

d) Montrer que M_n admet une espérance et une variance, et que :

$$E(M_n) = \frac{2n}{2n+1} R \text{ et } V(Mn) = \frac{n}{(n+1)(2n+1)^2} R^2$$

e) On cherche à estimer R avec M_n :
Calculer le biais de M_n , noté $b(M_n)$, et son risque quadratique noté $r(M_n)$.

5. a) Déterminer un équivalent simple lorsque n tend vers $+\infty$ de $b(M_n)$ et $r(M_n)$.
b) Quels sont les avantages et les inconvénients réciproques des estimateurs $\overline{X_n}$ et M_n ?