

Ex réductions : solutions

Exercice 1

A est une matrice triangulaire, donc ses valeurs propres sont les valeurs de sa diagonale : 1, 2 et 3. Elle a trois valeurs propres distinctes donc est diagonalisable.

B est une matrice symétrique, donc elle est diagonalisable.

Exercice 2

$$1) a) M = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 2/3 \\ 1/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b) \text{Im } f = \text{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) = \text{Vect}\left(\frac{1}{3}(e_2 + e_3), \frac{2}{3}e_1\right)$$

Les deux vecteurs sont non colinéaires donc forment une base de Im f. Donc Im f est de dimension 2.

D'après le théorème du rang, $\dim(\text{Ker } f) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\text{Im}(f)) = 1$

$$c) \text{ Soit } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad MX = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z = 0 \\ \frac{1}{3}x = 0 \\ \frac{1}{3}x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -z \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\text{Ker}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ z \end{pmatrix}, z \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \text{ (non nul donc base de Ker}(f)).$$

$$\text{Ker}(f) \neq \{0\} \text{ donc } 0 \text{ est valeur propre de } f. \text{ Et } E_0 = \text{Ker}(f) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right).$$

d) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ λ valeur propre de M $\Leftrightarrow M - \lambda I$ non inversible

$$M - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 2/3 & 2/3 \\ 1/3 & -\lambda & 0 \\ 1/3 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3\lambda & 2 & 2 \\ 1 & -3\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -3\lambda \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_1 \leftarrow 3L_1 \\ L_2 \leftarrow 3L_2 \\ L_3 \leftarrow 3L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3\lambda \\ 1 & -3\lambda & 0 \\ -3\lambda & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftrightarrow L_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3\lambda \\ 0 & 3\lambda & -3\lambda \\ 0 & 2 & -9\lambda^2 + 2 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow 3\lambda L_1 + L_3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3\lambda \\ 0 & 2 & -9\lambda^2 + 2 \\ 0 & 3\lambda & -3\lambda \end{pmatrix} \quad L_2 \leftrightarrow L_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3\lambda \\ 0 & 2 & -9\lambda^2 + 2 \\ 0 & 0 & -27\lambda^3 + 12\lambda \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow 3\lambda L_2 - 2L_3$$

$$-27\lambda^3 + 12\lambda = 3\lambda(-9\lambda^2 + 4)$$

$$3\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \quad -9\lambda^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = \frac{4}{9} \Leftrightarrow \lambda = \frac{2}{3} \text{ ou } -\frac{2}{3}.$$

Les valeurs propres sont 0, 2/3 et -2/3.

$$\text{Pour } \lambda = \frac{2}{3} : \text{ soit } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad MX - \lambda X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2y - 2z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2z \\ y = z \end{cases}$$

$$E_{2/3} = \left\{ \begin{pmatrix} 2z \\ z \\ z \end{pmatrix}, z \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\text{Pour } \lambda = -\frac{2}{3} : \begin{cases} x + 2z = 0 \\ 2y - 2z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2z \\ y = z \end{cases} \quad E_{-2/3} = \left\{ \begin{pmatrix} -2z \\ z \\ z \end{pmatrix}, z \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

OU : (en s'aidant de la matrice P)

$$\text{Soit } u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } u_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad f(u_1) = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 2/3 \\ 1/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} u_1$$

$$f(u_2) = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 2/3 \\ 1/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/3 \\ -2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix} = -\frac{2}{3} u_2.$$

Donc M a 3 valeurs propres distinctes 0, $\frac{2}{3}$ et $-\frac{2}{3}$.

$\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ donc il n'y a pas d'autres valeurs propres et elles sont toutes de multiplicité 1.

$E_{2/3} = \text{Vect}(u_1)$, $E_{-2/3} = \text{Vect}(u_2)$.

e) f a trois valeurs propres distinctes, donc est diagonalisable.

2)a) On remarque que P est la matrice de passage dans la base B' de vecteurs propres.

Donc P est inversible.

Si on pose $D = M_{B'}(f) = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors d'après la formule de changement de base :

$$A = PDP^{-1}.$$