ECE2 : Exercice intégrale impropre : Correction

1) Sur $]-\infty;a[$, f est nulle donc $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ est convergente et $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = 0$.

Sur $[a;+\infty[$, $f(x) = \dfrac{3a^3}{x^4}$ $4 > 1$ donc $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ converge.

De plus si $X \geq a$, $\int_a^X f(x)dx = \int_a^X \dfrac{3a^3}{x^4}dx = \int_a^X 3a^3 \times x^{-4}dx = \left[\dfrac{3a^3x^{-3}}{-3}\right]_a^X = \left[-\dfrac{a^3}{x^3}\right]_a^X$

$= -\dfrac{a^3}{X^3} + 1$ $\quad \lim\limits_{X \to +\infty} 1 - \dfrac{a^3}{X^3} = 1$ donc $\int_a^{+\infty} f(x)dx = 1$.

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ est convergente et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 0 + 1 = 1$

2) De la même manière, $\int_{-\infty}^{a} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{a} x^2 f(x)dx = 0$.

Sur $[a;+\infty[$, $xf(x) = \dfrac{3a^3}{x^3}$ $\quad 3 > 1$ donc l'intégrale est convergente.

$\forall X \geq a$, $\int_a^X \dfrac{3a^3}{x^3}dx = \int_a^X 3a^3x^{-3}dx = \left[\dfrac{3a^3x^{-2}}{-2}\right]_a^X = -\dfrac{3a^2}{2X^2} + \dfrac{3a^3}{2a^2} = \dfrac{3a}{2} - \dfrac{3a^2}{2X^2}$

$\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{3a}{2} - \dfrac{3a^2}{2X^2} = \dfrac{3a}{2}$ donc $E = \int_{-\infty}^{+\infty} x \times f(x)dx$ converge et $E = 0 + \dfrac{3a}{2} = \dfrac{3a}{2}$.

Sur $[a;+\infty[$, $x^2 f(x) = \dfrac{3a^3}{x^2}$ $\quad 2 > 1$ donc l'intégrale est convergente.

$\forall X \geq a$, $\int_a^X \dfrac{3a^3}{x^2} = \left[-\dfrac{3a^3}{x}\right]_a^X = -\dfrac{3a^3}{X} + 3a^2$ $\quad \lim\limits_{X \to +\infty} -\dfrac{3a^3}{X} + 3a^2 = 3a^2$.

Donc $F = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \times f(x)dx$ est convergente et $F = 0 + 3a^2 = 3a^2$

Donc $V = F - E^2 = 3a^2 - \dfrac{9a^2}{4} = \dfrac{12a^2 - 9a^2}{4} = \dfrac{3a^2}{4}$.

3) Si $x < a$ $\quad (]-\infty;x] \subset]-\infty;a[)$ $\quad G(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0$

Si $x \geq a$: $G(x) = \int_{-\infty}^{a} f(t)dt + \int_a^x f(t)dt = 0 + \int_a^x \dfrac{3a^3}{t^3}dt = 1 - \dfrac{a^3}{x^3}$.

Donc $G(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < a \\ 1 - \dfrac{a^3}{x^3} \text{ si } x \geq a \end{cases}$