ECE2 : Exercices sur les endomorphismes

Exercice 1

Dans $\mathbb{R}^3$, on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique.

On considère les vecteurs $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

1) a) Montrer que la famille $\mathcal{C} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$. Montrer que P est inversible.

2) On considère l'endomorphisme f dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Exprimer $f(u_1)$ en fonction de u_1, $f(u_2)$ en fonction de u_1 et u_2, et $f(u_3)$ en fonction de u_3.

b) En déduire la matrice T de f dans la base $\mathcal{C}$.

c) Exprimer la matrice A en fonction de P, P^{-1} et T.

3) f est-elle un automorphisme de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 2

Soit f l'application $\begin{cases} \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ P \longrightarrow P - (X+1)P' \end{cases}$

1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

2) Soit $\mathcal{B} = (e_0, e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. Déterminer la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}$.

3) On considère les polynômes $P_0 = 1$, $P_1 = X + 1$, $P_2 = (X + 1)^2$.

a) Montrer que (P_0, P_1, P_2) forme une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

b) Déterminer la matrice D de f dans cette base.

4) Quelle est la relation entre A et D ?