ECE2 : Exercices endomorphismes - Correction

Exercice 1

1) a) $au_1 + bu_2 + cu_3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ a + 2b + c = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases}$

$L_3 - L_1$: c = 0 donc $\begin{cases} a + b = 0 \\ a + 2b = 0 \end{cases}$ $L_2 - L_1$: b = 0 donc a = 0 donc la famille est libre.

$\text{Dim}(\mathbb{R}^3) = 3$ donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (u_1, u_2, u_3 est une base, donc la matrice de passage P est inversible.

2) a) $f(u_1) = Au_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2u_1$

$f(u_2) = Au_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ $f(u_2) = au_1 + bu_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 3 \\ a + 2b = 5 \\ a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$

Donc $f(u_2) = u_1 + 2u_2$. $f(u_3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3u_3$.

Donc $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ (coordonnées de $f(u_1)$, $f(u_2)$, $f(u_3)$ dans la base (u_1, u_2, u_3))

c) $A = M_B(f)$, $T = M_C(f)$ et $P = P_{B \longrightarrow C}$ donc $A = PTP^{-1}$

3) $T = M_C(f)$ est une matrice triangulaire supérieure sans 0 sur la diagonale, donc T est inversible. Donc f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2

1) $\forall P \in \mathbb{R}_2[X]$, $\forall Q \in \mathbb{R}_2[X]$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$f(\lambda P + Q) = \lambda P + Q - (X + 1)(\lambda P + Q)' = \lambda P + Q - (X + 1)(\lambda P' + Q')$

$= \lambda(P - (X + 1)P') + Q - (X + 1)Q' = \lambda f(P) + f(Q)$. Donc f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

2) $e_0 = 1$, $e_1 = X$, $e_2 = X^2$

$f(1) = 1 - (X + 1) \times 0 = 1$, $f(X) = X - (X + 1) = -1$, $f(X^2) = X^2 - (X + 1)2X = -X^2 - 2X$

Donc $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

3) a) $aP_1 + bP_2 + cP_3 = 0 \Leftrightarrow a + b(X + 1) + c(X^2 + 2X + 1) = 0$

$\Leftrightarrow cX^2 + (2c + b)X + (a + b + c) = 0$

Par identification des coefficients : $\begin{cases} c = 0 \\ 2c + b = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ b = 0 \\ a = 0 \end{cases}$

Donc c'est une famille libre. $\text{Dim}(\mathbb{R}_2[X]) = 3$, donc c'est une base.

b) $f(P_0) = f(1) = 1 = P_0$, $f(P_1) = f(X + 1) = X + 1 - (X + 1) = 0$

$f(P_2) = (X + 1)^2 - (X + 1) \times 2(X + 1) = -(X + 1)^2 = -P_2$. Donc $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

4) Si $B = (e_0, e_1, e_2)$ et $B' = (P_0, P_1, P_2)$.

$A = M_B(f)$, $D = M_{B'}(f)$. Soit $P = P_{B \longrightarrow B'}$. Alors $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, P est inversible, et $A = PDP^{-1}$