ECE2 : Solutions exercices densité

Ex 1

a) g est continue sur $]-\infty;0[$ (fonction nulle) et $]0;+\infty[$ (produit de fonctions continues)
g est positive sur $\mathbb{R}$

Si X est une V.A.R. qui suit la loi $\mathcal{E}(1)$, on sait que E(X) existe et vaut $\frac{1}{1} = 1$

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt$ converge et vaut 1. Donc g est une densité de probabilité.

b) Si $X \longrightarrow \mathcal{E}(1)$, $V(X) = \frac{1}{1^2} = 1$ $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 \Leftrightarrow 1 = E(X^2) - 1 \Leftrightarrow E(X^2) = 2$.

Or $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} tg(t)dt$ donc U admet une espérance et E(U) = 2.

Ex 2

1) f est continue sur $\mathbb{R}$ (sauf en a) et positive sur $\mathbb{R}$.
Sur $]-\infty;a[$, f est nulle, donc $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ converge et vaut 0.

Sur $[a;+\infty[$ $f(x) = \frac{3a^3}{x^4}$ $4 > 1$ donc $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ converge (intégrale de Riemann)

De plus, $\int_a^X f(x)dx = \int_a^X 3a^3x^{-4}dx = \left[3a^3\times\frac{x^{-3}}{-3}\right]_a^X = \left[-\frac{a^3}{x^3}\right]_a^X = -\frac{a^3}{X^3} + 1$

$\lim\limits_{X\to+\infty} -\frac{a^3}{X^3} + 1 = 1$ donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 0 + 1 = 1$

Donc f est une densité de probabilité.

2) Sur $]-\infty;a]$, xf(x) est nulle donc $\int_{-\infty}^{a} xf(x)dx$ converge et vaut 0.

Sur $[a;+\infty[$ $f(x) = \frac{3a^3}{x^3}$ $3 > 1$ donc $\int_{a}^{+\infty} xf(x)dx$ converge

De plus, $\int_a^X xf(x)dx = \int_a^X 3a^3x^{-3}dx = \left[3a^3\times\frac{x^{-2}}{-2}\right]_a^X = \left[-\frac{3a^3}{2x^2}\right]_a^X = -\frac{3a^3}{2X^2} + \frac{3a}{2}$

$\lim\limits_{X\to+\infty} -\frac{3a^3}{2X^2} + \frac{3a}{2} = \frac{3a}{2}$ Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = 0 + \frac{3a}{2} = \frac{3a}{2}$

T admet une espérance et $E(T) = \frac{3a}{2}$.

De même $\int_{-\infty}^{a} x^2f(x)dx$ converge et vaut 0.

Sur $[a;+\infty[$, $xf(x) = \frac{3a^3}{x^2}$ l'intégrale converge car $2 > 1$.

$\int_a^X \frac{3a^3}{x^2} = \left[-\frac{3a^3}{x}\right]_a^X = -\frac{3a^3}{X} + 3a^2$ $\lim\limits_{X\to+\infty} -\frac{3a^3}{X} + 3a^2$

donc $E(X^2)$ existe et $E(X^2) = 0 + 3a^2 = 3a^2$

donc V(X) existe et $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 3a^2 - \frac{9a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$

3) si $x < a$ $F_T(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0$

si $x \geq a$ $F_T(x) = \int_{-\infty}^{a} f(t)dt + \int_a^x f(t)dt = 0 + \int_a^x \frac{3a^3}{t^4}dt = 1 - \frac{a^3}{x^3}$